MATHEMATIK

Referenzbahnen für Roboter

AUSGEFEILTE MATHEMATISCHE VERFAHREN ERMÖGLICHEN DIE HOCHGENAUE BERECHNUNG OPTIMALER BAHNEN FÜR INDUSTRIEROBOTER. ZUM ABSCHLUSS DES JAHRES DER MATHEMATIK 2008 STELLT „AKADEMIE AKTUELL" EIN BEISPIEL FÜR DIE BEDEUTUNG DER DISZIPLIN IN DER INDUSTRIELLEN PRAXIS VOR.

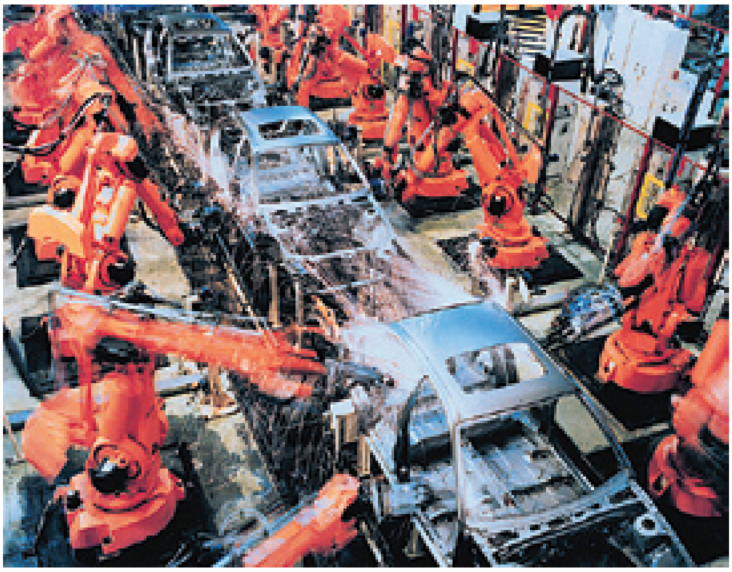


Abb. 1: In der Automobilindustrie werden Roboter schon lange beim Schweißen und Lackieren eingesetzt.

VON RAINER CALLIES

In den letzten zwei Jahrzehnten erfuhren mathematische Algorithmen zur Berechnung der Dynamik von Industrierobotern beträchtliche Aufmerksamkeit. Sie spielen eine entscheidende Rolle in der Simulation, der Auslegung und der optimalen Steuerung der Roboter.

Basis jeder Roboterbewegung: Algorithmen

Die meisten dieser Algorithmen basieren auf dem Euler-Lagrange- oder dem Newton-Euler-Formalismus, die zu äquivalenten Resultaten führen. Die Bewegungsgleichungen, die man auf diese Weise aufstellt, bilden den Kern jedes Optimalsteuerungsproblems, gleichgültig, ob etwa die Fingerspitze eines Roboters in kürzestmöglicher Zeit von Punkt A zu Punkt B bewegt werden soll (Punkt-zu-Punkt-Bewegung) oder ob der Roboter eine vorgegebene Bahn unter Einsatz von möglichst wenig Energie abfahren soll (energieminimale Bewegung). Hinzu kommen in der Praxis in allen Fällen zahlreiche Zustands- und Steuerbeschränkungen.

In industriellen Anwendungen werden heute Optimalsteuerungsprobleme für Roboter überwiegend durch so genannte direkte Methoden gelöst. Diese sind gekennzeichnet durch die Strategie „erst diskretisieren, dann optimieren". Im ersten Schritt diskretisiert man die Steuervariablen – und oft auch die Zustandsvariablen – und transformiert so das Optimalsteuerungsproblem in ein großes, beschränktes und häufig dünn besetztes Problem der nichtlinearen Optimierung.

Im einfachsten Fall nähert man die Steuerung durch eine Folge von Geradenstücken an und optimiert die Lage der Verheftungspunkte dieser Geradenstücke. So lässt sich vermeiden, direkt mit den notwendigen Bedingungen aus der Theorie der optimalen Steuerungen zu arbeiten. Allerdings wird dadurch auch der Bezug zu der speziellen ingenieurmäßigen Fragestellung aufgegeben, dem diskretisierten Problem ist seine Herkunft kaum noch anzusehen.

In einem zweiten Schritt wird das resultierende Problem der nichtlinearen Programmierung durch hochentwickelte Standardalgorithmen wie Methoden der Sequentiellen Quadratischen Programmierung oder Innere-Punkt-Verfahren gelöst.

Bekannte Realisierungen dieser Zugangsweise sind direkte Schießverfahren und direkte Kollokationsverfahren. Neuere direkte Methoden liefern zusätzlich punktweise Abschätzungen der adjungierten Variablen.

Neben diesen allgemein anwendbaren Ansätzen entstand im Laufe der Jahre eine Vielzahl mathematischer Einzelverfahren mit beschränktem Gültigkeitsbereich. Sie sind maßgeschneidert für die Lösung spezieller Fragestellungen bei der Bahnoptimierung von Robotern und basieren vielfach auf ingenieurmäßig fundierten Vorhersagen über die Lösungsstruktur einer speziellen Problemklasse. Lösungsstruktur bedeutet, dass die Abfolge von Teilstücken bekannt ist, auf denen eine Steuerung ihr Maximum, ihr Minimum oder Zwischenwerte annimmt, nicht jedoch deren Länge und der zeitliche Verlauf der Zwischenwerte.

Genauigkeit

Aus mathematischer Sicht erscheint es wichtig, direkte Lösungsverfahren durch indirekte Ansätze zu ergänzen. Dazu gehören Gradienten- und Mehrzielverfahren. Indirekte Ansätze lassen sich charakterisieren durch die Strategie „erst optimieren, dann erst numerisch diskretisieren“. Ihre Basis ist die mathematisch umfassende Auswertung des grundlegenden Pontrjaginschen Maximumprinzips. Sie gestattet es, das Optimalsteuerungsproblem in ein abschnittsweise definiertes Mehrpunktrandwertproblem zu transformieren. Es enthält ohne qualitätsmindernde Näherungen die volle mathematische Information über das ursprüngliche Steuerungsproblem. Erst anschließend diskretisiert man dieses Randwertproblem im Verlauf des numerischen Lösungsprozesses.

Solche Verfahren werden eingesetzt, um hochgenaue Referenztrajektorien zu generieren oder Lösungsstrukturen von Optimalsteuerungsproblemen mathematisch zu analysieren. Der Preis für die extrem hohe Genauigkeit der Lösungen ist ein größerer Aufwand bei der Formulierung des erweiterten Steuerungsproblems, bei dem je nach Verfahren simultan oder fast simultan mit den Bewegungsgleichungen auch ein ähnlich großer Satz von Differentialgleichungen für die adjungierten Variablen behandelt wird. Außerdem ist es natürlich aufwändiger, aber auch genauer, vorgegebene Beschränkungen auf ganzen Intervallen einzuhalten und nicht nur an einzelnen diskreten Punkten wie bei den direkten Ansätzen.

Prinzipieller Lösungsweg

Die Bewegungsgleichungen des Roboters bilden das Schlüsselelement. In einer sehr allgemeinen Weise lässt sich der Prototyp eines solchen Optimalsteuerungsproblems wie folgt formulieren:

Gesucht sind eine n-komponentige Zustandsfunktion $x:[t_0,t_f]\rightarrow\mathbb{R}^n$ und eine p-komponentige Steuerfunktion $u:[t_0,t_f]\rightarrow U\subseteq\mathbb{R}^p$, die eine Zielfunktion vom Typ

$$\int_{t_0}^{t_f} L(t,x(t),u(t))\,dt$$

minimieren. Die Zeit t ist die unabhängige Variable, die Bewegung beginnt zur Zeit t_0 und endet zur Zeit t_f. Zu den Zuständen x zählen etwa die Ortskoordinaten oder die Geschwindigkeitskomponenten der einzelnen bewegten Teile des Roboters. Gesteuert wird ein Roboter z. B. über die Drehmomente der Elektromotoren, die an den einzelnen Gelenken angreifen; diese Steuerungen bilden das u. In dem L werden die Qualitätsanforderungen an die Roboterbewegung (möglichst schnell, möglichst energiesparend oder ähnliches) mathematisch abgebildet.

$$0 = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}(t))\ddot{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t),\dot{\boldsymbol{x}}(t)) - \boldsymbol{u}(t)$$

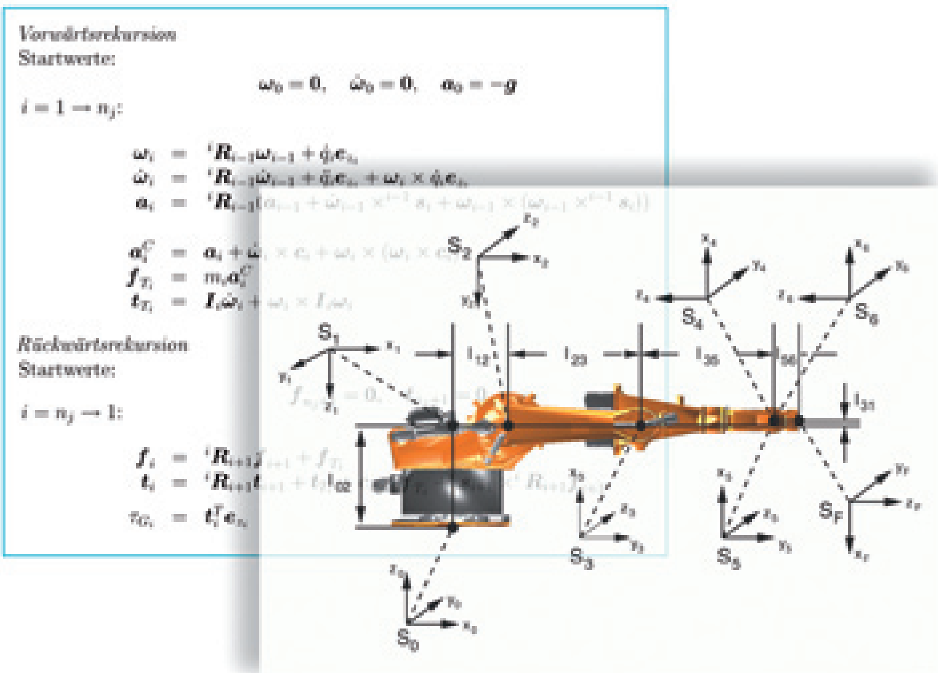
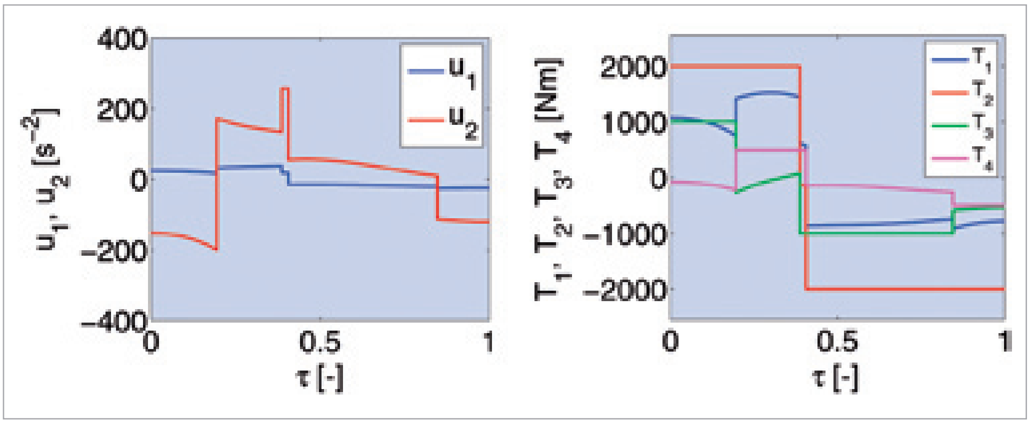


Abb. 2: Körperfeste Koordinatensysteme helfen, den Roboter zu strukturieren. Im Hintergrund ein Teil eines rekursiven Algorithmus zur Berechnung der Bewegungsgleichungen, der sehr genau an die Roboterstruktur angepasst ist.

R. CALLIES



R. CALLIES

Abb. 3: Transformationstechniken vereinfachen die Berechnung optimaler Steuerungen für einen redundanten Roboter. Links sind die Steuervariablen u_1, u_2 als Funktionen der normalisierten Zeit $\tau := t/(t_f - t_0)$ dargestellt, die sich aus der Lösung des in Minimalkoordinaten umformulierten Problems ergeben. Die rechte Graphik zeigt die realen Motordrehmomente T_1, T_2, T_3, T_4 in Abhängigkeit von τ nach der Rücktransformation.

Hinzu kommen die Bewegungsgleichungen des Roboters

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, t_f]$$

sowie Randbedingungen.

Unterliegt das System keinen weiteren Beschränkungen, so ergibt sich aus der Theorie der optimalen Steuerungen ein $2n$-dimensionales, d. h. doppelt so großes System gekoppelter nichtlinearer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)),\\ \dot{\lambda}(t) &= -H_x(t, x(t), \lambda(t), u(t)).\end{aligned}$$

λ bezeichnet den Vektor der adjungierten Variablen und $H := L + \lambda^T f$ die skalare Hamiltonfunktion.

Die Steuerungen erhält man im einfachsten Fall aus der Ableitung von H nach u

$$H_u(t, x(t), \lambda(t), u(t)) = 0$$

unter Hinzunahme weiterer Ausschlusskriterien.

Abhängig von der speziellen Form von f und L treten die Steuerungen u nur linear oder auch nichtlinear auf. Interessanterweise benötigt der auf den ersten Blick einfacher erscheinende lineare Fall – der auch in der Robotik häufig anzutreffen ist – sehr viel tiefergehende mathematische Analysen.

Die Transformation des Optimalsteuerungs- in ein Randwertproblem wird abgeschlossen durch die Hinzunahme von Randbedingungen wie

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f.$$

In dieser Form ist das Randwertproblem im Prinzip mit Standardalgorithmen der numerischen Mathematik behandelbar. Langjährige Entwicklungen gestatten es, mit solchen Algorithmen immer schneller und stabiler auch sehr große Probleme zu lösen.

In der Praxis kann man sich jedoch nicht auf solch einfache Problemtypen beschränken. Häufig sind die Randbedingungen sehr viel komplizierter oder auch unvollständig gegeben, Bedingungen an inneren Punkten (etwa das Abfahren festgelegter Zwischenpositionen) kommen hinzu. Auch hier ermöglicht es die mathematische Theorie, einen vollständigen Satz von Bedingungen streng herzuleiten.

Wie kann man die Bewegungen beschränken?

Ungleich schwieriger wird es, wenn es gilt, zahlreiche Beschränkungen in das Problem mit aufzunehmen. So darf etwa ein in einer engen Montagezelle tätiger Roboter nicht mit den Wänden oder anderen gleichzeitig aktiven Robotern in Kontakt kommen, die Belastungen auf die Struktur des Roboters sind zu begrenzen, Lebensdaueraspekte spielen zunehmend eine Rolle. Eine Beschränkung wird aktiv, wenn die Roboterbahn bei Vernachlässigung dieser Beschränkung dieselbe verletzen würde. Durch die Beschränkung ändert sich nicht nur das Lösungsverhalten auf den beschränkten Teilstücken, sondern die Roboterbahn insgesamt.

Allgemeine Beschränkungen lassen sich an die Hamiltonfunktion des oben dargestellten, unbeschränkten Prototypproblems mittels Lagrange-Multiplikatorfunktionen ankoppeln, der Lösungsformalismus wird entsprechend erweitert. Dazu ist die Struktur der Beschränkung genau zu analysieren sowie das Verhalten der Lösung beim Übergang von beschränkten zu unbeschränkten Teilstücken der Lösung.

Hier ist man mathematisch in den letzten Jahren entscheidende Schritte weitergekommen. Indem man aktive Beschränkungen als nichtlineare Gleichungssysteme interpretiert, die abschnittsweise zu den Bewegungsdifferentialgleichungen hinzukommen, schafft man die Verbindung zur mathematischen Disziplin der differential-algebraischen Gleichungen (DAEs). Das Optimalsteuerungsproblem wird zu einem Randwertproblem für DAEs mit allerdings abschnittsweise unterschiedlicher Dimension und Struktur. Die teilweise Transformation in Minimalkoordinaten erleichtert den Lösungsprozess signifikant. Noch wichtiger aber ist, dass sich die komplizierten Bedingungen an den Verheftungsstellen zwischen beschränkten und unbeschränkten Extremalenbögen jetzt formal einheitlich – und damit automatisierbar – herleiten lassen.

Strukturanalyse

Die Bewegungsgleichungen eines Roboters weisen eine charakteristische Grundstruktur auf. Für die Starrkörperbewegung eines idealisierten Roboters erhält man $M(x(t))\ddot{x}(t) = u(t) + h(x(t), \dot{x}(t), t)$. Die Winkel der n Robotergelenke bilden den Vektor der Zustandsvariablen $x \in \mathbb{R}^n$, die ersten und zweiten Zeitableitungen $\dot{x}, \ddot{x} \in \mathbb{R}^n$ sind die verallgemeinerten Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. $M = M(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die symmetrische Massematrix und die nichtlineare Funktion $h = h(x, \dot{x}, t) \in \mathbb{R}^n$ enthält die Momente, die durch Gravitations-, Zentrifugal-, Coriolis- und Reibungskräfte verursacht werden. Die Steuervariablen $u \in \mathbb{R}^n$ unterliegen stets Beschränkungen vom Typ $u_i(t) \in [u_{i1}(t), u_{i2}(t)]$ mit vorgegebenen Grenzfunktionen $u_{i1}(t) \leq u_{i2}(t)$, $i = 1,...,n$; auf diese Weise beschreibt der Formalismus sowohl aktive als auch passive Gelenke, d. h. solche ohne eigenen Antriebsmotor.

$M = M(x(t))$ und $h = h(x(t), \dot{x}(t), t)$ enthalten das ingenieurmäßige Wissen, in komplizierte Formeln gefasst. Die numerische Auswertung ist problemlos möglich, für den Mathematiker sind Detailstrukturen hinter den beiden Funktionen kaum noch ersichtlich. Für die Simulation einer Roboterbewegung genügt das, nicht aber für die optimale Steuerung.

Hier benötigt man effizienten Zugriff auf genaue erste und häufig auch zweite Ableitungen, im Fall indirekter Methoden sogar auf Ableitungen bis zur Ordnung vier oder fünf. Die direkte Berechnung solcher Ableitungen per Hand ist wegen der Länge der entstehenden Ausdrücke und der Fehleranfälligkeit in der Regel unzumutbar. Formelmanipulationsprogramme oder Methoden der automatischen Differentiation übernehmen prinzipiell diese Arbeit, führen aber bei höheren Ableitungen zu Programmcodes, die sich über Dutzende von Seiten erstrecken und entsprechend schwerfällig und langwierig auszuwerten sind.

Blickt man andererseits dem Ingenieur bei der Modellierung über die Schulter, so erkennt man ein sehr strukturiertes Vorgehen. Arm für Arm setzt er seinen virtuellen Roboter zusammen, ausgehend von einer Basis. Für jeden neuen Arm ist die Position aus der Kenntnis des Ansatzpunktes leicht berechenbar, ebenso die Gelenkgeschwindigkeit und -beschleunigung. Wenn dieser Roboter arbeitet, erfährt er Kräfte und Momente, die sich von der Fingerspitze durch die ganze Struktur schrittweise bis zur Basis ausbreiten. Die Beschreibung der Roboterbewegung lässt sich zurückführen auf klar strukturierte Rekursionen (Abb. 2).

Vollzieht man dieses strukturierte Modellieren bei der Berechnung aller Ableitungen von M und h nach, so erhält man hochgenaue Ableitungsinformationen zu einem Bruchteil der Kosten. Für dritte Ableitungen reduziert sich der nachgewiesene Rechenaufwand je nach Roboter um den Faktor 80 bis 1100. Dies liegt auch daran, dass man bereits berechnete Bausteine immer und immer wieder verwenden kann.

Alle weitergehenden Schritte bei der numerischen Auswertung der Bewegungsgleichungen und aller benötigten Ableitungsinformationen bestehen dann im Wesentlichen aus der direkten Lösung einer Reihe von kleinen linearen Gleichungssystemen. Das trifft übrigens auch für die Behandlung aktiver nichtlinearer (!) Beschränkungen zu.

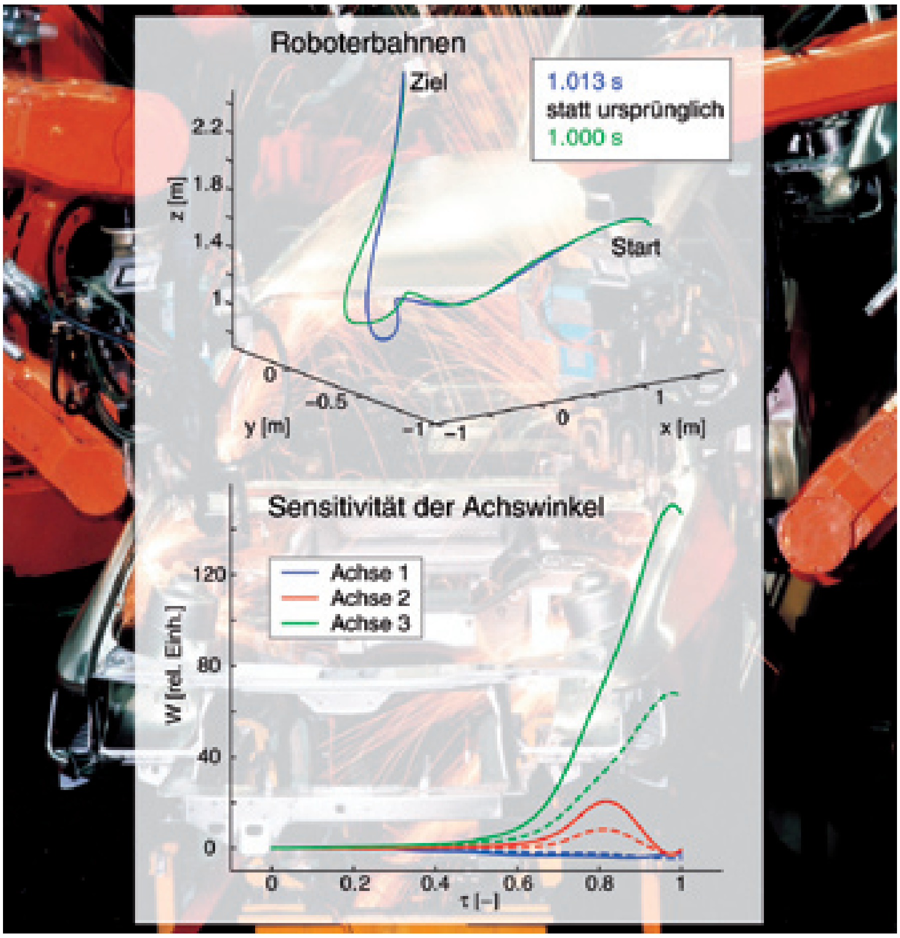
Bei indirekten Ansätzen lassen sich höhere Ableitungsinformationen überdies einsetzen, um Strukturinformationen für eine neu zu berechnende Bahn nicht schätzen zu müssen, sondern sie aus dem Verhalten bereits bekannter, benachbarter Trajektorien direkt generieren zu können. Zudem gewinnt man über die Ableitungsinformationen mit geringem Zusatzaufwand Kenngrößen für die Stabilität der berechneten Lösungen im industriellen Einsatz.

Anwendungsbeispiel: Redundante Optimalsteuerung

In einer Vielzahl industrieller Anwendungen wie etwa an Montagelinien und Schweißstationen muss der Endeffektor eines Roboters in kürzestmöglicher Zeit entlang eines vorgegebenen Weges bewegt werden. Dafür ist mindestens ein dreigelenkiger Roboter nötig, der Einsatz eines vierten (redundanten) Gelenkes erhöht die Flexibilität. Die Bewegungsgleichungen bilden zusammen mit der Pfadrestriktion ein DAE-System vom differentiellen Index 3, zusätzlich sind weitere Beschränkungen einzuhalten.

Ein eleganter Lösungsansatz besteht in der Transformation in Minimalkoordinaten. Statt vier verbleiben nur zwei neue Steuerungen: Die Winkelbeschleunigung des vierten Gelenkes sowie die Beschleunigung entlang des vorgegebenen Weges, die algebraische Nebenbedingung ist automatisch erfüllt. Allerdings ist die Steuerstruktur zu kompliziert, um einfach eine Startschätzung für die numerische Lösung zu generieren. Zusätzlich werden acht nichtlineare Beschränkungen eingeführt.

Eine genaue mathematische Analyse ergibt, dass die Steuerungen linear in den Beschränkungen und der Hamiltonfunktion auftreten. Da die optimale Steuerung letztere minimiert, gewinnt man Strukturinformationen über die Steuerung zu jedem Zeitpunkt durch die Lösung eines linearen Optimierungsproblems. Ist so die Struktur bekannt, erhält man die genauen Lösungswerte effizient aus der numerischen Lösung eines nichtlinearen Randwertproblems.



R. CALLIES

Abb. 4: Echtzeitrekalibrierung durch Wahl einer modifizierten Rücktrajektorie (Bild oben, blau) mit geringfügig verlängerter Bewegungszeit gegenüber der Originalbahn (grün). Das Empfindlichkeitsfunktional W weist für die Achsen 2 und 3 auf der neuen Bahn (Bild unten, durchgezogene Linien) signifikant höhere Werte auf als auf der alten (gestrichelte Linien).

Die ursprünglichen Steuerungen ergeben sich dann durch Rücktransformation (Abb. 3).

Anwendungsbeispiel: Echtzeit-Rekalibrierung

Im industriellen Einsatz führen Roboter die gleichen Bewegungen immer und immer wieder durch. Änderungen der Umgebungsbedingungen wie auch unvermeidbarer Verschleiß bedingen im Laufe der Zeit ein Wegdriften der Systemparameter von den einmal gemessenen Werten. Zyklische Rekalibrierung ist daher notwendig. Der Aufwand dafür lässt sich drastisch senken, indem man die Rekalibrierung in den laufenden Betrieb integriert. So fährt ein Schweißroboter nach der Ausführung eines Arbeitszyklusses möglichst schnell in die Ausgangsposition zurück. Verlängert man die hierfür zur Verfügung stehende Zeit nur um etwa 1 %, so lassen sich leicht geänderte Rückfahrbahnen finden, die abschnittsweise eine besonders hohe Empfindlichkeit auf die Veränderung einzelner Parameter aufweisen und so zuverlässige Indikatoren für Veränderungen im Robotersystem bilden (Abb. 4). Um Kollisionen mit benachbarten Robotern zu vermeiden, darf die neue Bahn nur wenig von der ursprünglichen Bahn abweichen und muss ganz in einem virtuellen Schlauch um diese verlaufen. Diese Forderung führt auf zusätzliche Beschränkungen der lokalen Zustände. Das Beispiel zeigt, dass es durch die neuen strukturierten Ansätze möglich wird, sogar Stabilitäts- und Sensitivitätskriterien direkt in den Optimierungsprozess miteinzubeziehen.

Zusammenfassung

Methoden, die auf dem Maximumprinzip basieren, bilden exzellente Werkzeuge zur Berechnung optimaler Roboterbahnen mit hoher Genauigkeit. Zudem gestatten sie die strukturelle Analyse von Roboterbewegungen und umfangreiche Stabilitätsaussagen. Durch eine Vielzahl neuer Maßnahmen gelingt es, die Modellierung der Optimalsteuerungs- sowie der zugehörigen Randwertprobleme weitgehend zu automatisieren. Dazu zählen rekursive Techniken sowie die Transformation von beliebigen Beschränkungen auf lineare Gleichungssysteme oder ihre Elimination durch den Einsatz von Minimalkoordinaten. Damit wird eine Einbeziehung in Mehrkörpersimulationspakete und deren Erweiterung auf Anwendungen der optimalen Steuerung möglich. Fortlaufend weiterentwickelte numerische Algorithmen führen zu einer deutlich verbesserten Stabilität des Lösungsprozesses und extrem kurzen Rechenzeiten.

Der Autor ist Professor am Zentrum Mathematik der TU München. Seine Forschungsschwerpunkte sind u. a. die optimale Steuerung und Designoptimierung von Systemen, die durch differential-algebraische Gleichungen beschrieben werden. Praktische Anwendungen finden die Methoden überwiegend im Maschinenwesen.