



MUSIKWISSENSCHAFT

Zahlenverhältnisse, Proportionen, Tonabstände: Musik und Mathematik

EIN BEITRAG ZUR BEDEUTUNG DER MATHEMATIK AM ANFANG DER
EUROPÄISCHEN MUSIKGESCHICHTE, ALS ES NOCH KEIN NOTENSYSTEM
GAB, UM MELODIEN VISUELL EXAKT DARZUSTELLEN.

VON MICHAEL BERNHARD

Als sich im 7. und 8. Jahrhundert in den Ländern nördlich der Alpen das Christentum ausbreitete, gelangte aus Italien auch eine besondere Art von Musik, der so genannte Gregorianische Choral, in diese Länder, der wesentliche Teile der christlichen Liturgie feierlich gestaltete. Während man die Texte der Liturgie aufschreiben konnte, existierte für die Musik noch keine Methode, die Melodien festzuhalten. Isidor von Sevilla († 636) schreibt: *Nisi enim ab homine memoria teneantur soni, pereunt, quia scribi non possunt* (Wenn die Töne nicht im Gedächtnis behalten werden, vergehen sie, weil sie nicht aufgeschrieben werden können). Das Repertoire wurde also ausschließlich mündlich weitergegeben.

Wie lassen sich Melodien schriftlich festhalten?

Doch das Gedächtnis ist eine nicht unerhebliche Fehlerquelle, die Liturgie aber von so zentraler Bedeutung, dass man ständig in Sorge war, die Melodien unverfälscht zu bewahren. Nachdem Karl der Große in seiner *Admonitio generalis* aus dem Jahre 789 den *cantus Romanus*, den Römischen Choralgesang, allgemein für verbindlich erklärt hatte, versuchten

die Musiker nördlich der Alpen im 9. Jahrhundert, das große Repertoire an Gesängen irgendwie in den Griff zu bekommen. Man ordnete die Melodien nach bestimmten melodischen Eigenschaften in acht Modi, aus denen sich später das System der acht Kirchentonarten entwickelte. Aurelianus Reomensis, ein französischer Mönch des 9. Jahrhunderts, versuchte beispielsweise, die Melodien mit blumigen Ausdrücken zu beschreiben, ohne dass es ihm gelang, sie auch nur annähernd nachvollziehbar zu machen.

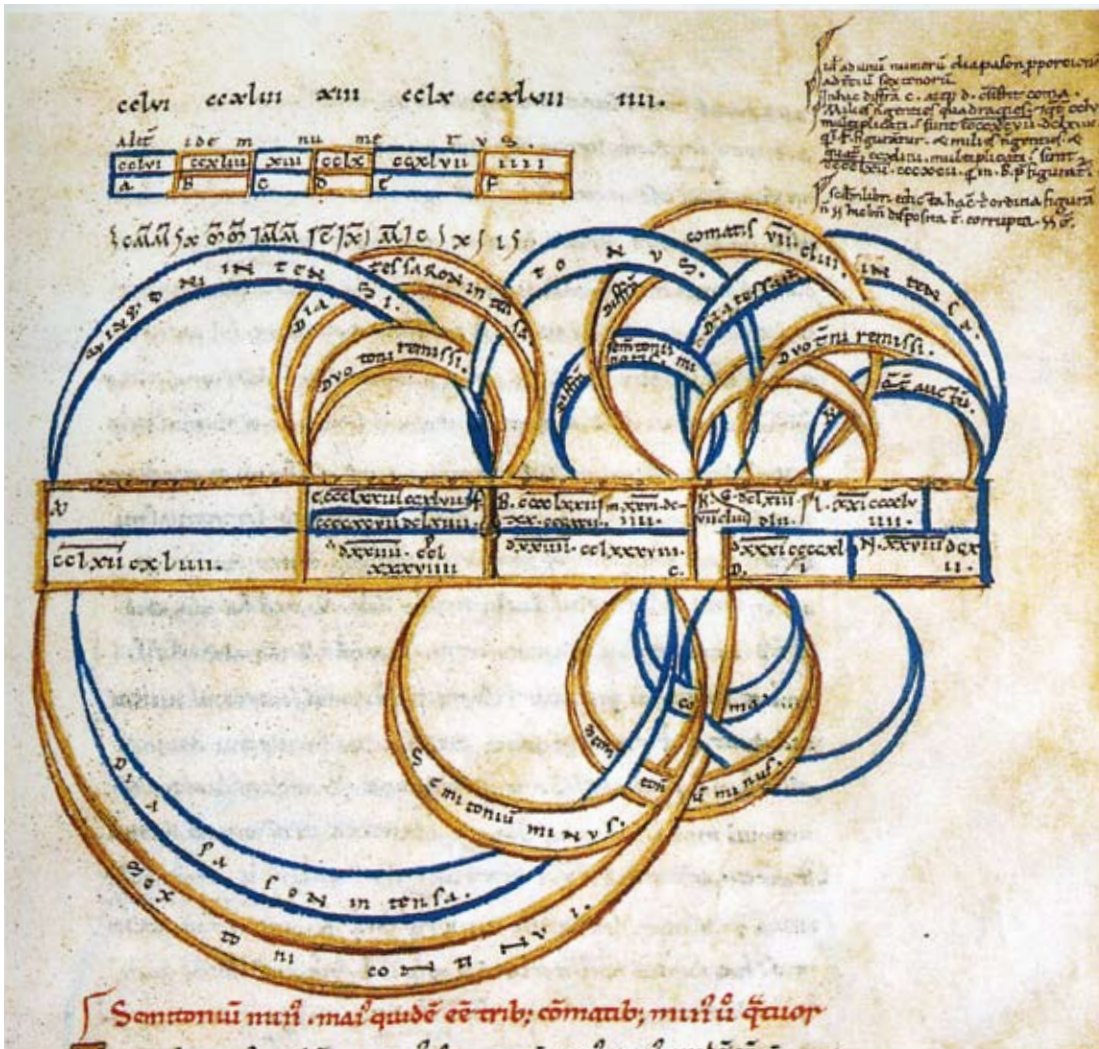
Ein spätantikes Werk über Musik gelangt in das Frankenreich

In dieser Situation kam unerwarteterweise die Mathematik der Musik zu Hilfe: Am Anfang des 9. Jahrhunderts gelangte ein einziges Exemplar eines spätantiken Werkes in das Frankenreich, das bis dahin vollkommen unbekannt war. Es handelte sich um die fünf Bücher *De institutione musica* des römischen Konsuls Anicius

Manlius Severinus Boethius, der im Jahre 524 wegen einer angeblichen Verschwörung enthauptet worden war. Der Autor war durch seine Schrift *De consolatione philosophiae* wohlbekannt und hochgeschätzt. Der Titel des Buches *De institutione musica* versprach viel. Doch die Enttäuschung war wohl zunächst groß: Es ging nicht um erklingende Musik, sondern im Wesentlichen um Zahlen – weit-schweifige Berechnungen zu Zahlenverhältnissen und Proportionen. Trotzdem studierte man das Werk sehr intensiv, was uns ausführlich kommentierte Abschriften seit der Mitte des 9. Jahrhunderts verraten.

Zunächst versuchte man, die Berechnungen zu verstehen. Multiplikationen und Divisionen mit dem römischen Zahlensystem waren sehr aufwändige Rechenoperationen. Wie man das macht, zeigt ein mittelalterlicher Kommentator. Die Aufgabe lautet: Multipliziere 256 mit 256. Die Zahl 256 wird dazu zerlegt in $200 + 50 + 6$. Daraufhin multipliziert man alle Summanden miteinander:

$200 \times 200 = 40.000$	$50 \times 200 = 10.000$	$6 \times 200 = 1.200$
$200 \times 50 = 10.000$	$50 \times 50 = 2.500$	$6 \times 50 = 300$
$200 \times 6 = 1.200$	$50 \times 6 = 300$	$6 \times 6 = 36$
<hr/> $51.200 \quad + \quad 12.800 \quad + \quad 1.536 = 65.536$		



Boethius' „De institutione musica“ mit der Berechnung des Tonsystems in einer Handschrift des 12. Jahrhunderts aus Autun. Oben rechts ist ein mittelalterlicher Kommentar eingetragen.

Doch was haben Berechnungen dieser Art mit Musik zu tun?

Musik als mathematische Disziplin

Für Boethius gehört die Musik neben der Arithmetik, der Geometrie und der Astronomie zu den mathematischen Wissenschaften im Rahmen der *septem artes liberales*, der so genannten sieben freien Künste. Ihre spezielle Aufgabe ist es, mathematische Verhältnisse und Proportionen zu untersuchen.

Wenn man eine Saite beliebiger Länge schwingen lässt, erklingt ein Ton. Eine Saite mit genau der hal-

ben Saitenlänge ergibt einen fast gleich klingenden, aber höheren Ton, nämlich die Oktave.

Eigentlich ist es natürlich die Zahl der Schwingungen, die für die Tonhöhe verantwortlich ist, aber das wusste man in der Antike nicht. Allerdings ist die Länge einer Saite mit der Zahl der Schwingungen unmittelbar verbunden. Eine Oktave ist also durch das Verhältnis 2:1 zu beschreiben. Ebenso kann man eine Quinte als Verhältnis von 3:2, eine Quarte als Verhältnis von 4:3 und einen Ganzton als Verhältnis von 9:8 bestimmen. Wenn man diese Verhältnisse entsprechend erweitert, ergibt sich die folgende Zahlenreihe:

12 : 9 : 8 : 6

12:6 = 2:1 = Oktave

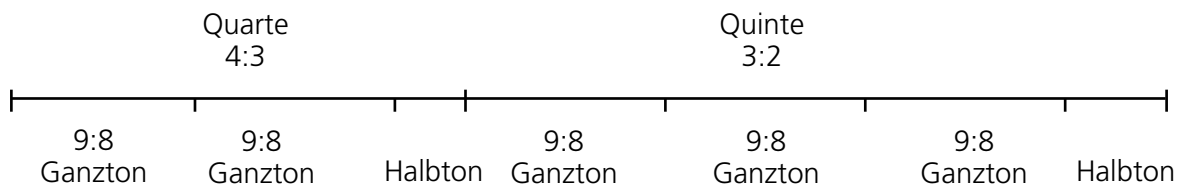
12:8 = 9:6 = 3:2 = Quinte

12:9 = 8:6 = 4:3 = Quarte

9:8 = Ganzton

Aus diesen einfachen Zahlenverhältnissen lässt sich eine komplette Tonleiter konstruieren: Die Quinte besteht aus einer Quarte und einem Ganzton, die Quarte aus zwei Ganztönen und einem Rest, den man Halbton nennt, obwohl er nicht genau die Hälfte eines Ganztons umfasst (siehe Abb. nächste Seite).

BIBLIOTHÈQUE MUNICIPALE 46, AUTUN



Die mathematische Berechnung dieses Halbtons ist kompliziert, da er das Verhältnis 256:243 besitzt. (Hier taucht die Zahl 256 wieder auf, die Gegenstand der oben beschriebenen Multiplikation war.) Um die Zahlenverhältnisse eines Tonsystems über zwei Oktaven in einer durchgehenden Reihe darzustellen, muss man daher die Zahlen erheblich erweitern. Boethius berechnete eine Tonreihe über zwei Oktaven, die mit folgenden Zahlen dargestellt wurde:

9216 8192 7776 6912 6144 5832 5184 4608
 Ganzton Halbton Ganzton Ganzton Halbton Ganzton Ganzton usw.

Damit wird eine Tonleiter berechnet, die wir heute mit folgenden Tonbuchstaben benennen würden:

A H C D E F G a

Um den Halbton und den Unterschied zwischen zwei Halbtönen und einem Ganzton darzustellen,



Boethius prüft an einem einsaitigen, mit Tonbuchstaben versehenen Instrument, dem so genannten Monochord, die Tonreihe.

sind sogar Rechenoperationen mit sechsstelligen Zahlen notwendig.

Die Mathematik ermöglicht eine exakte Bestimmung musikalischer Intervalle

Die Gelehrten des frühen Mittelalters merkten erst nach einiger Zeit, wozu die mathematischen Berechnungen dienen konnten. Im 9. Jahrhundert hatte sich zwar eine Methode entwickelt, den Verlauf von Melodien durch Punkte, Striche und andere graphische Zeichen, die so genannten Neumen, aufzuzeichnen, allerdings konnte man damit keine genauen Tonabstände notieren.

Plötzlich hatte man nun ein Mittel an der Hand, musikalische Intervalle exakt zu bestimmen

und mit Hilfe eines Instruments für jeden nachvollziehbar zu machen. Wenn man sich die aus Zahlenverhältnissen berechneten Punkte des Tonsystems auf einer Saite markierte, konnte man durch Abgreifen der Saite jeden Ton und jedes Intervall hörbar machen. Die abgemessenen Punkte auf der Saite wurden bei Boethius mit griechischen Namen benannt: *hypate hypaton*, *parhypate hypaton*, *lichanos hypaton* usw. Das war für die Beschreibung einer ganzen Melodie natürlich viel zu umständlich. Man versuchte daher verschiedene Methoden mit neu erfundenen Zeichen oder Buchstaben, bis sich um das Jahr 1000 die Buchstabenreihe A B C D E F G

durchsetzte, die auch heute noch in der Musik verwendet wird. Nur der Ton B, der ursprünglich einen Ganzton vom Ton A entfernt war, wurde in späteren Jahrhunderten durch das H ersetzt. Der Buchstabe B blieb für einen Ton, der einen Halbton von A entfernt ist. Erst im 11. Jahrhundert hatte Guido von Arezzo die geniale Idee, die Tonabstände durch Einführung von Linien, auf welche die Neumen notiert wurden, auch visuell umzusetzen. Letztendlich verdanken wir aber die Möglichkeit, Musik exakt darstellen zu können, dem Werk des Boethius.



Der Autor ist wissenschaftlicher Mitarbeiter der Musikhistorischen Kommission. Er betreut als leitender Redaktor das Lexicon musicum Latinum, ein Wörterbuch der lateinischen musikalischen Fachsprache des Mittelalters bis zum Ende des 15. Jahrhunderts.

Die frühmittelalterlichen Kommentare zu Boethius' „De institutione musica“ sind in den Veröffentlichungen der Musikhistorischen Kommission der Bayerischen Akademie der Wissenschaften ediert: Michael Bernhard, Calvin M. Bower: „Glossa maior in institutionem musicam Boethii“, 3 Bde. 1993–1996.