

KEILSCHRIFTMATHEMATIK

Zählen – Messen – Wägen: Rechnen vor 4000 Jahren

MIT TONTAFELN MATHEMATISCHEN INHALTS BESCHÄFTIGEN SICH HEUTE
ALBERTUMS- UND NATURWISSENSCHAFTLER GLEICHERMASSEN.

VON SABINE ECKLIN

Dass die Babylonier die Griechen und damit unsere Wissenschaft beeinflusst haben, ist allgemein bekannt. Zum Zeitpunkt jener Kulturübernahme, besonders im naturwissenschaftlichen Bereich, war seit den ersten schriftlich überlieferten Zeugnissen wissenschaftlicher Tätigkeit schon fast so viel Zeit vergangen, wie zwischen uns und den griechischen Anfängen liegt. Die „mesopotamische Mathematik“ ist ein langer Prozess, der zum ersten Mal schon auf Wirtschaftstexten des 3. Jahrtausends belegt ist, derer Schreiber nach allgemeiner Ansicht die Sumerer waren. Er reicht über tiefgreifende Reformen um das Jahr 2000 bis zum Beginn unserer Zeitrechnung.

Berücksichtigt man dazu die große geographische Ausdehnung (das Kernland zwischen Euphrat und Tigris, vom persischen Golf über das iranische Hochplateau bis nach Kleinasien, Syrien und Palästina) mit dadurch bedingten örtlichen Besonderheiten, so erstaunt es nicht, dass die „Keilschriftmathematik“ ein äußerst vielfältiges Forschungsfeld ist. Gerade in jüngster Zeit bekommt diese „Wissenschaft in der Wissenschaft“ durch Forschungen mathematisch/astronomisch spezialisierter Assyriologen resp. Mathematiker/Physiker/Astronomen mit Spezialgebiet Assyriologie neuen Aufwind.

Keilschriftmathematik an der Akademie

In Band sieben des „Reallexikons der Assyriologie und Vorderasiatischen Archäologie“ (1987–1990), einem Projekt der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, stehen die zwei Artikel, die zum ersten Mal das Wissen um „Mathematik“ (Verfasser: J. Friberg) und „Maße und Gewichte“ (Verfasser: M. A. Powell für Mesopotamien, Th. van den Hout für Anatolien) zusammenfassten. Beide Artikel, die gemeinsam fast 130 Seiten füllen, sind auch heute noch die Grundlagenwerke zu diesem Thema.

Entdeckungen im Orient

Bis diese Reallexikoneinträge geschrieben werden konnten, war viel Kleinarbeit nötig: zuerst in Vorderasien von Archäologen, dann an den Schreibtischen von Philologen. Vor etwas mehr als hundert Jahren wurden in Nippur (Südmesopotamien) die ersten Tafeln ausgegraben, mit denen die Forschungsgeschichte der Keilschriftmathematik begann. Es handelte sich bei jenem Fund um Hunderte von Tontäfelchen, auf denen Schreiber Schüler mathematische Aufgaben gelöst hatten. Während mehr als eines halben Jahrhunderts bildeten diese Texte,

P. Attinger, J. Friberg und P. Paoletti haben mir freundlicherweise ihre Unterlagen zur Verfügung gestellt, H. Brunke hat mich fachlich beraten. Ihnen danke ich an dieser Stelle.



QUELLE: P. PAOLETTI (UNVERÖFFENTLICHT)

Gewogenes auf einer Ur III-Wirtschaftstafel (aus dem sog. Schatzarchiv).
Text auf der Tafel:
„ $\frac{2}{3}$ Mine 7 $\frac{5}{6}$ Schekel Silber, „ausgewählte Sachen“, hat Ada-galšum gesandt. Aus dem Palast gekommen, Einlieferung, via Lisin. Lu-diġira war Empfänger, in Puzriš-Dagān“. (Datum)
Auf dem Rand ist das Gewicht noch einmal notiert: $\frac{2}{3}$ Mine 7 $\frac{5}{6}$ Schekel.

Altsumerische Tafel mit Übungen zu Maßeinheiten (wahrscheinlich früh-dynastisch).



(und eventuell darüber hinaus) belegt sind, sowie Tabellen und Listen aus allen drei Jahrtausenden, während derer sich die Menschheit im Vorderen Orient der Keilschrift bediente. Allerdings gibt es Überlieferungslücken, die – gerade im 2. Jahrtausend – über Jahrhunderte dauern.

Zählen, messen, wägen

Mathematik beginnt beim Zählen. In der Keilschriftmathematik ist einer der ganz großen Schritte der Menschheit nachvollziehbar: das Loslösen der Anzahl vom Gezählten. Etwa zeitgleich – wir denken hier in Dimensionen von Jahrhunderten – fand auch der Prozess vom Sprechen zum Schreiben (das Loslösen des Lautes vom bezeichneten Gegenstand) statt.

Auf den frühesten Tafeln aus der Uruk-Zeit sind Anzahl und Gezähltes eine Einheit. Je nach Gezähltem wird ein anderes Zählsystem verwendet. Das abstrakte Zählen findet zwar schon statt, ist aber noch untrennbar mit einem Gegenstand resp. einer Gruppe von Gegenständen verbunden. Es werden zwar teilweise die gleichen Keilschriftzeichen benutzt, die aber je nach System etwas anderes bedeuten.

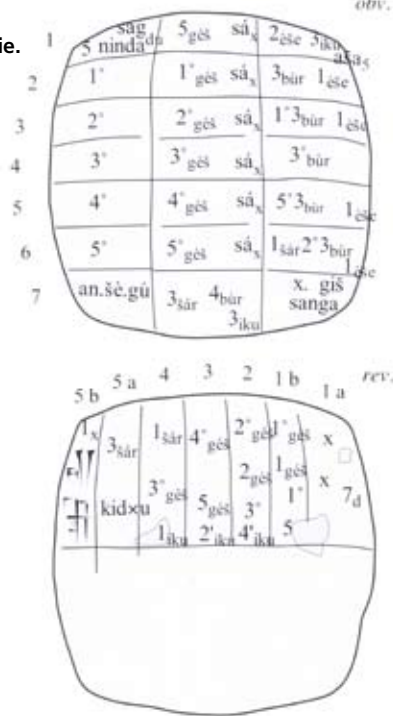
Ein Beispiel:

- Das Zeichen ● steht für
- 10 Einheiten (eines Zahlensystems) für Menschen, Tiere usw.
- 10 Einheiten (eines Zahlensystems) für tote Tiere usw.
- 10 Einheiten (eines Zahlensystems) für verschiedene Rationen
- 1 Flächeneinheit
- 1 Getreideeinheit

Bis heute ließen sich 13 verschiedene Zählsysteme rekonstruieren, darunter:

– verschiedene Systeme für das Zählen von zählbaren Gegenständen: eines für Tiere, Menschen, Gemüse, getrockneten Fisch,

Transliteration und Kopie.



die aus der altbabylonischen Zeit stammen, die Hauptquelle für die Rekonstruktion mathematischen Denkens und Unterrichtens vor 4000 Jahren. Zwar wurden auch an vielen anderen Stätten – v. a. Südmesopotamiens – mathematische Tafeln gefunden, sie weckten aber kaum Interesse und verschwanden in den Magazinen der Museen. Erst in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts wurde das Interesse der Assyriologen und Naturwissenschaftler neu entfacht, als auch in Nordmesopotamien und Elam Tafeln mit mathematischem Inhalt ausgegraben und publiziert wurden.

Fundlage

Die meisten Tafeln, anhand derer das mathematische Denken, Wissen und Lehren rekonstruiert wird, stammen entweder aus Schultexten von den ersten drei Jahrhunderten des 2. Jahrtausends (altbabylonische Zeit) oder aus den Erzeugnissen der durch die „neue“ Wissenschaft Astronomie beeinflussten Schreibertätigkeit der Seleukidenzeit in den letzten Jahrhunderten vor der Zeitwende.

Eine andere überaus reiche Quelle sind Verwaltungsdokumente, die seit der Zeit der Schrifterfindung

QUELLE: J. FRIBERG, A REMARKABLE COLLECTION OF BABYLONIAN MATHEMATICAL TEXTS, S. 484 (PHOTO UND 150 (KOPIE UND TRANSLITERATION))

Werkzeug usw., eines für tote Tiere, Krüge, eines für Getreide, Käse, frischen Fisch, eines für einen zur Zeit noch unbekanntem Gegenstand;
 – verschiedene Systeme für Flüssigkeiten und Getreidesorten;
 – ein System für Flächen.

Nachdem diese Systeme – zwar sehr kompliziert, aber in sich eindeutig – erkannt wurden, erweisen sie sich als ungemein nützlich: Der heutige Leser, wie schon der Leser im Alten Orient, weiß mit einem Blick auf ein Zeichen nicht nur, wie viel, sondern auch was gezählt wird.

Erst zum Zeitpunkt, als die Zahl sich bis zu einem gewissen Grad vom Gezählten gelöst hatte, konnten theoretische Berechnungen angestellt werden. Dies gipfelte in unzähligen Tafeln und Tabellen zu Reziprokwerten, Multiplikation und Division, Potenzen und Wurzeln, Exponentialfunktionen und Logarithmen, ohne die gewisse Rechenaufgaben nicht hätten gelöst werden können.

Zählen

Auch zum Zählen einerseits und zum Notieren der Zahlen andererseits wurden verschiedene Systeme benutzt. Das in den mathematischen Texten aus altbabylonischer Zeit zu findende so genannte Sexagesimalsystem, womit das Zahlensystem mit der Grundzahl (Basis) 60 gemeint ist (lat. sexagesimus „der Sechzigste“ in Entsprechung zu Dezimalsystem aus lat. decimus „der



Altbabylonische Multiplikationstafel: 12er-Reihe.

QUELLE: J. FRIBERG, A REMARKABLE COLLECTION OF BABYLONIAN MATHEMATICAL TEXTS, S. 470 (PHOTO) UND 71 (TRANSLITERATION)

Zehnte“), hat sich teilweise bis in die heutige Zeit erhalten: Es findet sich noch in unserer Zeitrechnung (Stunde, Minuten) und ebenso im Winkelmaß (Grad, Bogenminuten).

Sexagesimalsystem

Der in der Literatur stets verwendete Begriff „Sexagesimalsystem“ ist insofern nicht korrekt, als alternierend Zehner- und Sechser-schritte angewendet werden. Die Grundzeichen sind Υ (diš: Zeichen für Eins), \triangleleft (u: Zeichen für Zehn) und Υ (ĝeš₂: Zeichen für Sechzig, gleiches/ähnliches Zeichen wie Eins) und \diamond (šar₂: Zeichen für Dreitausendsechshundert). (s. Tab. 1)

Für Eins und für Sechzig benutzt die Keilschrift das gleiche oder ein ähnliches Zeichen. Ursprünglich waren die Zeichen gut unterscheidbar, was beweist, dass dem so genannten „Sexagesimalsystem“ die zwei Basen 10 und 6 zugrundeliegen. Für Zahlen, die das Vorstellungsvermögen überstiegen, wurden keine eigenen Zeichen

verwendet, sondern die Umschreibung „große Gesamtheit“ (für 216.000) und „große Gesamtheit, die nicht erreicht werden kann“ (für 2.160.000).

In einem Wirtschaftstext heißt es zum Beispiel:

4 šar ₂ 4 x 3600	3 ĝeš'u 3 x 600	8 ĝeš ₂ 8 x 60	5 u 5 x 10	7 diš 7	ku ₆ Fisch(e)

Übersetzt wird die Sequenz mit „16.737 Fische“.

Ein besonderes Mischsystem

In akkadischen Texten (nicht aber mathematischen Inhalts) ist schon seit Mitte des 3. Jahrtausends ein Mischsystem belegt. Bis 99 zählt es gleich wie das sumerische Sexagesimalsystem. Dann folgt aber das Wort für Hundert (me'at) und für Tausend (ltmu).

So heißt es in einem Text:
 $\triangleleft \Upsilon \Upsilon \Upsilon$ li-im $\Upsilon \Upsilon \Upsilon \Upsilon$ mi-at $\Upsilon \triangleleft \Upsilon \Upsilon$
 Transliteration:
 13 li-im 9 mi-at 72 (60 + 12)
 Übersetzung: 13.972.

Tab. 1: Sexagesimalsystem.

šar ₂ -gal šu nu-ta ₃	šar ₂ -gal	šar'u	šar ₂	ĝeš'u	ĝeš ₂	u	diš/aš	giĝ ₄
große Gesamtheit, die die Hand nicht berührt (= nicht erreicht werden kann)	große Gesamtheit	zehn Gesamtheiten	Gesamtheit	zehn Sechziger	Sechzig	Zehn	Eins	Schekel
2.160.000	216.000	36.000	3.600	600	60	10	1	1/60

Literaturhinweise:

Pascal Attinger: Vorlesungsmanuskript „Mathematik“, Universität Bern, Sommersemester 2006.
Robert K. Englund: Texts from the Late Uruk Period, in: P. Attinger/M. Wäfler (ed.) Mesopotamien, Annäherungen 1 (= Orbis Biblicus et Orientalis 160/1), Freiburg 1998.
Robert K. Englund: Organisation und Verwaltung der Ur III-Fischerei (= Berliner Beiträge zum Vorderen Orient 10), Berlin 1990.
Jöran Friberg: A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts, New York und Berlin 2007.
Joachim Oelsner: Zur Mathematik des alten Mesopotamien, in: C. Wilcke (ed.), Das geistige Erfassen der Welt im Alten Orient, Wiesbaden 2007.
Christine Proust: Mathématique en Mésopotamie, Site CultureMath: <http://www.dma.ens.fr/culturemath/>, 2006.

Sexagesimales Stellenwert- oder Positionssystem

Im Zuge einiger – allerdings nicht genau fassbarer – Reformen kurz vor 2000 v. Chr. erfuhr auch die Art und Weise, wie Zahlen in den mathematischen Texten geschrieben wurden, eine grundlegende Änderung. Es wird nur noch mit den beiden Zeichen für Eins und Zehn operiert, deren Position ihren Wert bestimmt. Nach 59 beginnt die nächste Einheit auf der nächsten Position. Der große Unterschied zu unserem System, das nach 9 auf einer neuen Position beginnt, besteht darin, dass weder ein Platzhalter für einen nicht durch eine Zahl besetzten Platz existierte (unsere Null), noch ein Zeichen, um die dezimalen Bruchteile abzutrennen (unser Komma). Jedes Zifferzeichen einer keilschriftlich geschriebenen Zahl steht für ein ganzzahliges Vielfaches einer negativen oder positiven Potenz von Sechzig. Dabei werden allerdings diejenigen Potenzen von Sechzig, welche mit der Vielfachheit Null auftreten, nicht durch ein eigenes Zeichen, sondern überhaupt nicht notiert. Auch kann der Exponent der Potenz von Sechzig, deren Vielfachheit durch eine bestimmte Ziffer wiedergegeben wird, aus dem Keilschrifttext nicht ohne weiteren Kontext bestimmt werden (relatives Positionsnotationssystem).

Zum Beispiel kann die Zeichenfolge $\ll \lll \llll \lllll$ (die Abfolge der

Ziffernzeichen für 44, 26 und 40) verschiedene Zahlenwerte bezeichnen:

	$44 \times 60^2 + 26 \times 60 + 40$	=	160.000
oder:	$44 \times 60^3 + 26 \times 60^2 + 40 \times 60$	=	9.600.000
oder:	$44 \times 60 + 26 + 40 \times 1/60$	=	2.666,66666
oder gar:	$44 \times 60^4 + 26 \times 60 + 40 \times 1/3.600$	=	570.241.560,01111 usw.

Messen und wägen

Hohl-, Längen-, Flächenmaße, Gewichte und Volumen wurden durch je ein eigenes System ausgedrückt, wobei sich die Systeme gegenseitig beeinflusst haben. Erschwert wurde und wird die Rekonstruktion mathematischen Denkens durch die Tatsache, dass es während der fast drei Jahrtausenden einerseits zu Entwicklungen, dann aber auch zu bewussten Reformen kam und gleichzeitig geographische Besonderheiten und Ausnahmen zu berücksichtigen sind. Die in Tabelle 2 aufgeführten Beispiele der Hohlmaße sind nur für eine bestimmte Zeit an einem bestimmten Ort gültig (vgl. die Vielfalt an Systemen – z. B. Währungseinheiten – auch noch in unserer Zeit).

Schlussbemerkung

Wirtschaftstexte gibt es zu Hunderttausenden. Auf den ersten Blick scheinen sie unspektakulär, ja langweilig. Erst wenn mit den darauf notierten Mengenangaben gerechnet werden kann, eröffnet sich ein Blick auf den Alltag in

Mesopotamien, der in keinem Epos, keiner Königsinschrift, keiner noch so großartigen Architektur, keinem

Grab gefunden werden kann. Es ist möglich, die Anzahl der Arbeiter in einer Wirtschaftseinheit zu bestimmen, zu rekonstruieren, was sie aßen, womit sie handelten, was sie in welchen Mengen anbauten, wie viel Besitz sie hatten, wie sie sich kleideten, wie sie bauten, sogar wohin sie reisten usw. Noch sind unzählige Fragen offen – die Assyriologie ist und bleibt eine äußerst spannende und vielfältige Wissenschaft. An der Bayerischen Akademie der Wissenschaften entsteht zur Zeit das „Reallexikon der Assyriologie und Vorderasiatischen Archäologie“. Die Einträge von A bis S sind in den schon erschienenen 11 Bänden nachzuschlagen.



Die Autorin studierte Assyriologie und Vorderasiatische Archäologie. Seit Anfang 2006 ist sie wiss. Mitarbeiterin der 1946 gegründeten Kommission für Keilschriftforschung und Vorderasiatische Archäologie und leitet die Redaktion des Reallexikons der Assyriologie und Vorderasiatischen Archäologie.

Tab. 2: Hohlmaße (die Umrechnung in heutige Maße und Gewichte ergibt Ungefähr-Werte!).

šar ₂ (/kuru13)	←x6	geš ² u	←x10	geš ₂	←x6	u	←x10	aš	←x5	bariga	←x6	ban ₂	←x10	silā ₃	←x60	giĝ ₄
Gesamt (heit) /Speicher		zehn Sechziger		Sechzig		Zehn		Eins		Scheffel		Seah		Liter		Schekel
3600 gur		600 gur		60 gur		10 gur		1 gur		60 sila		10 sila		1 sila		1/60 sila
Kor		Kor		Kor		Kor		Kor		Liter		Liter		Liter		Liter
1.080.000 l		180.000 l		18.000 l		3.000 l		300 l		60 l		10 l		1 l		17 ml

Kulturelle Entwicklung zur Zeit der Keilschrift

	Archäologische Periode	Epochenbezeichnung		Kultur/Technik	Sprache
		Nordmesopotamien Anatolien	Südmesopotamien		
4000	Frühe Bronzezeit	Uruk		Esel Rad „Uruk-Schrift“ Verwaltungsdokumente: zählen Fernhandel Metalle: Gold, Silber, Blei, Kupfer-Arsenik Städte Lexikalische Listen	sumerisch [?]
3000		frühdynastisch		Keilschrift Verwaltungstexte (Buchhaltung) Mathematische Problemlösungen Schülertexte: Tabellen (Multiplikation von Längenmaßen ergibt Flächenmaße) Literatur Metalle: Zinn Stadtstaaten	sumerisch
2500		altakkadisch, sargonisch		Pferde Staatenbildung Reformen: Metrologie, Recht, Schrift, Verwaltung (Buchhaltung), Kalender Schülertexte: Flächenberechnungen, Reziproken-Tabellen Schulen Medizin Sexagesimales Positions- oder Stellenwertsystem	akkadisch, sumerisch
2000	Mittlere Bronzezeit	altassyrisch	alt-babylonisch	Wagen, Speichenräder Kühlhäuser Schülertexte: metrologische und numerische Tabellen, Rechenaufgaben Rechtscodizes	akkadisch (sumerisch als tote Sprache für Literatur, Königsinschriften, Ritualtexte ...)
	Späte Bronzezeit				
1500	Eisenzeit	mittelassyrisch Mitanni Hethiterreich	mittel-babylonisch kassitisch	Glas Eisen Astrologie Astronomie	akkadisch kassitisch [?] (sumerisch)
1000		neuassyrisch	neu-babylonisch	Münzen Messing Bibliotheken (Ninive, Assur) Sternenwarten	akkadisch aramäisch (sumerisch als tote Sprache)
600	Eisenzeit	achämenidisch seleukidisch		Bibliotheken (Uruk, Babylon) Mathematische Astronomie	aramäisch (akkadisch, sumerisch als tote Sprachen)
300					