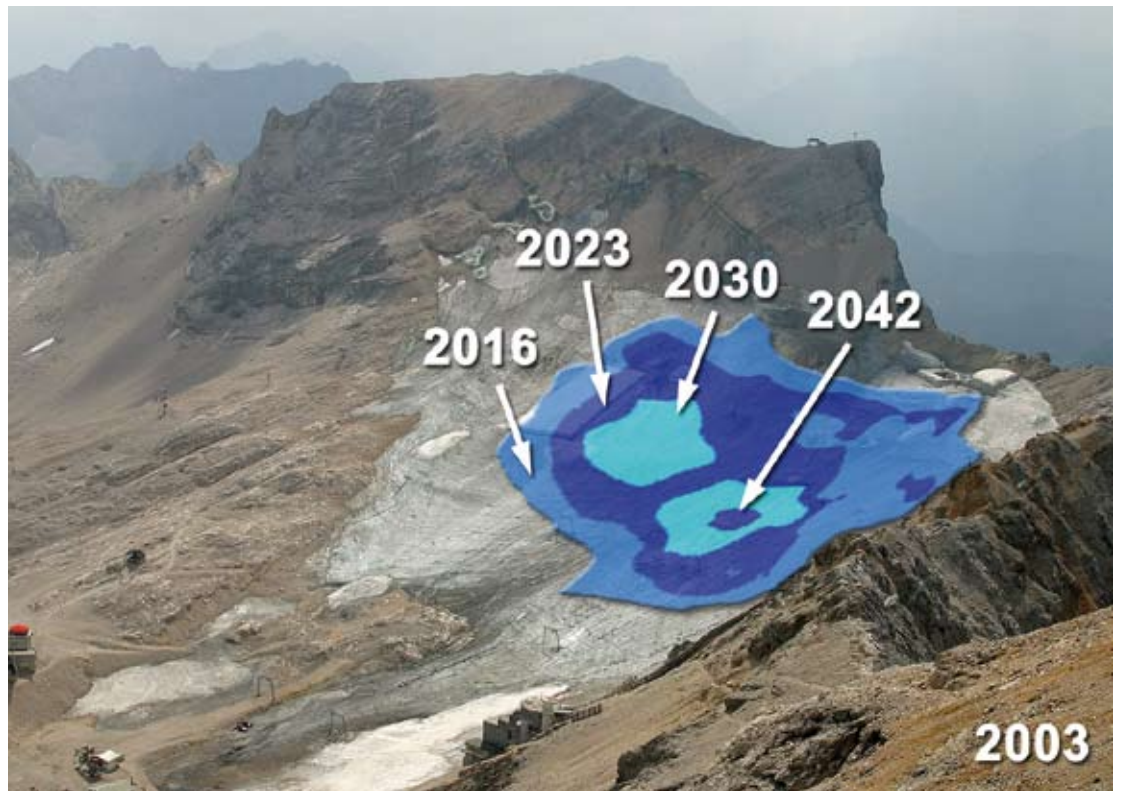


GLAZIOLOGIE

Neue Erkenntnisse zur Gletscherschmelze

HÖHERE MATHEMATIK HILFT BEI DER SCHNEE- UND GLETSCHERMODELLIERUNG.



Vorhersagen zur zukünftigen Ausdehnung eines Gletschers, wie hier des Nördlichen Schneeferners an der Zugspitze, sind nur mit Hilfe komplexer Rechenmodelle möglich.

VON MARKUS WEBER

Ist der Gletscherforscher bei der Berechnung der Gletscherschmelze auf die höhere Mathematik angewiesen? Diese Frage hängt wesentlich von der Komplexität und Genauigkeit des von ihm gewählten mathematischen Modells zur Beschreibung des Untersuchungsobjekts und der Wechselwirkung mit seiner Umgebung ab.

Die wissenschaftlichen Fragestellungen der Glaziologie sind vielfältig. Neben der einfachen Bestandsaufnahme der Eismassen interessieren

hydrologische Details, wie z. B. die Menge des an irgendeiner Stelle der Gletscheroberfläche gebildeten Schmelzwassers unter gegebenen Wetterbedingungen oder das Fließen des Eises durch einen Querschnitt im Gletscherbett. Es besteht aber auch intensives Interesse daran, die Ausdehnung der Gletscherflächen in den Alpen gegen Ende des Jahrhunderts unter den Bedingungen des globalen Klimawandels vorherzusagen. Diese sehr umfassende Fragestellung wird gegenwärtig mit fachlicher Unterstützung der Kommission für Glaziologie im Rahmen des BMBF-Verbundprojektes GLOWA-Danube untersucht.

Die Maßstabsfrage – Ein erster Schritt zur Parametrisierung

Um Zusammenhänge in der Natur zu verstehen oder gar berechnen zu können, sind Modellvorstellungen unverzichtbar, die in der Sprache der Mathematik formuliert werden müssen. Die Komplexität dieser Modelle hängt davon ab, wie viele physikalische Zusammenhänge im Detail beschrieben werden sollen und in welchem räumlichen und zeitlichen Maßstab. Es gibt sicherlich sachlich begründbare Argumente dafür, die Berechnung auf der kleinsten Skala, nämlich für die Atome der beteilig-

ALLE BILDER: KFG

ten Medien zu beginnen. Eine solche Vorgehensweise wäre jedoch für die wenigsten Problemstellungen überhaupt praktikabel. Vielmehr gilt es zu untersuchen, ob nicht bereits fertig formulierte Modelle für ein Teilproblem verfügbar sind, die wesentliche Beobachtungen gut erklären.

Theoretisch könnte man zur Berechnung der Schmelzwassermenge an einem beliebigen Punkt auf dem Gletscher einen komplexen Algorithmus auf Basis von räumlich und zeitlich hoch aufgelösten Messdaten der Zustandsgrößen der beteiligten Medien (z. B. absorbierte Strahlung, Lufttemperatur, -feuchte, -druck, -bewegung) formulieren, der ein exaktes Resultat liefern würde. Dieser hätte die Energiebilanz der Gletscheroberfläche als Grundlage und sollte alle Wechselwirkungen des Eises mit der Umgebung berücksichtigen. Eine Ausdehnung der Berechnung auf die *gesamte* Gletscherfläche würde dagegen bereits an der Verfügbarkeit der erforderlichen Messdaten scheitern, selbst wenn der Rechenaufwand mit geeigneten Maschinen zu bewältigen wäre. Aber spätestens dann, wenn die weitere Entwicklung der 550 Gletscherflächen im Donaueinzugsgebiet über einen Zeitraum von 50 bis 100 Jahre berechnet werden soll, sind dem vertretbaren Aufwand noch engere Grenzen gesetzt, denn es fehlt die Geduld, auf der Basis heutiger Rechenkapazitäten mehrere Jahrzehnte auf das Resultat zu warten.

Die Rechenmodelle müssen somit für eine praktische Anwendung stark vereinfacht werden, wozu wiederum die Mathematik die geeigneten Werkzeuge bereitstellt, vorzugsweise über die Statistik. Als Ergebnis dieser Bemühungen erhält man einfache Formeln zur Beschreibung der komplexen Zusammenhänge zwischen Prozessen und spärlich vorhandenen

Messdaten, die zwar einen deutlich eingeschränkten, jedoch wohl definierten Gültigkeitsbereich für die Anwendung innerhalb eines räumlichen und zeitlichen Maßstabs besitzen. Dieser Maßstab muss dem Prozess und der Fragestellung entsprechend durch Abschätzung der Bedeutung der jeweils wirksamen Prozesse gewählt werden. Beispielsweise ist es unter Umständen nicht notwendig, die Ergebnisse in der Mikroskala im Zentimeterbereich zu betrachten, sondern man kann sie auf größere Einheiten von einigen Dekametern oder Kilometern zusammenfassen. Gleiches gilt für die Zeitmaßstäbe, die eventuell nicht mehr Sekunden, sondern Stunden oder Tage umfassen müssen. Dafür ergeben sich neue Variablen und Konstanten, die für eine Lösung der Gleichungen bestimmt werden müssen.

Diese nicht mehr explizite, sondern implizite Beschreibung eines komplexen Prozesses über angepasste Parameter wird in der Mathematik auch als Parametrisierung bezeichnet. Zur Festlegung der Parameter mittels statistischer Methoden muss man sich zumindest exemplarisch bzw. theoretisch mit den grundlegenden Prozessen befassen. Oft geschieht dies unter Anwendung weiterer mathematischer Modelle.

Die Glaziologie ist bei der Behandlung ihrer Fragestellungen in besonders hohem Maße auf die Anwendung von Parametrisierungen im Rahmen ihrer Rechenmodelle angewiesen, denn das meist schwer zugängliche Gelände und die raue Witterung machen es schwierig, kontinuierlich flächendeckende Messdaten zu gewinnen. In diesem Beitrag soll skizziert werden, wie ein sehr komplexes Problem bei der Berechnungen der Gletscherschmelze, nämlich die Berücksichtigung des turbulenten Wärmeübergangs aus der Luft,

mit Hilfe der Mathematik, einigen Überlegungen und beschränkten Felduntersuchungen anwenderfreundlich gelöst werden kann.

Wie berechnet man Turbulenz?

Bei dem Transport von Wärme auf Grund der turbulenten Luftbewegung in der Luftschicht unmittelbar über dem Gletscher handelt es sich um einen komplizierten Prozess. Zwar wird der größte Teil der zur Gletscherschmelze aufgewandten Energie durch die kurzweilige Strahlung der Sonne aufgebracht, dennoch spendet auch die Atmosphäre unter Schmelzbedingungen einen nennenswerten Wärmestrom, welcher mit Flussdichten zwischen 25–150 Wm⁻² positiv in die Oberflächenenergiebilanz eingeht. Dazu sind zwei Voraussetzungen notwendig:

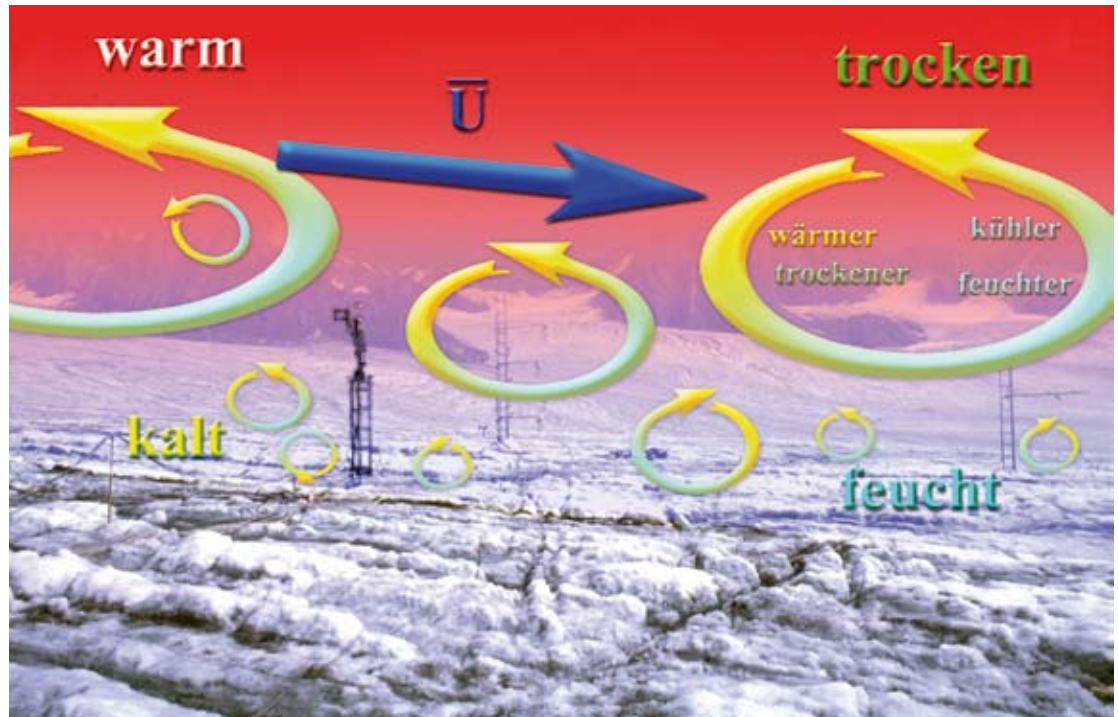
1. die Luftmasse über dem Gletscher ist wärmer als 0° C,
2. die Existenz einer turbulenten Strömung mit horizontalen und vertikalen Luftbewegungen innerhalb der Luftschicht.

Eine weitere wichtige Randbedingung ergibt sich beim Auftreten von Schmelze: Die Oberflächentemperatur des Eises wird auf dem Schmelzpunkt fixiert. Mit Hilfe der irregulären Bewegungen in der Luftströmung wird wärmere Luft aus den höheren Schichten zur Oberfläche transportiert, obwohl die mittlere Vertikalverteilung der Temperatur eine Zunahme zeigt, die in der Regel Vertikalbewegungen dämpft.

Dennoch ist der aus der turbulenten Durchmischung resultierende Wärmetransport H erstaunlich effizient im Vergleich zu dem durch die molekulare Wärmeleitung der Luft. Letzterer kann mathematisch einfach in der Form

$$[1] \quad H = C_L \cdot (T_L - T_0)$$

Abb. 1: Illustration der Modellvorstellung vom Vertikaltransport von Wärme (und Wasserdampf) durch turbulente Wirbel in der oberflächennahen Luftschicht. Die mit der mittleren Strömung an fest installierten Messgeräten vorbeidriftenden Elemente hinterlassen ihre Spur in den gemessenen Zeitreihen.



mit dem konstanten Wärmeleitkoeffizienten C_L der Luft und der Differenz der Temperatur an der Obergrenze und der an der Untergrenze der bodennahen Luftschicht beschrieben werden. Eine einfache Formel wie diese kann ein interessanter Ansatz für eine Parametrisierung des turbulenten Wärmeflusses sein. Aber Letzterer variiert zusätzlich mit der vertikalen Temperaturverteilung und den Eigenschaften der turbulenten Bewegung. Deshalb benötigt man zu dessen genauer Berechnung sowohl die Kenntnis der räumlichen Verteilung der Temperatur als auch des dreidimensionalen Bewegungsfeldes der Luftteilchen.

Das mathematische Rüstzeug für die korrekte Berechnung dieser Felder steht den Meteorologen durch die nachfolgend skizzierten „primitiven“ Grundgleichungen bereits zur Verfügung. Es handelt sich um einen Satz von gekoppelten Differentialgleichungen, welcher die meteorologischen Zustandsgrößen miteinander verknüpft. Er besteht aus:

1. der Bewegungsgleichung in vektorieller Schreibweise

$$[2] \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}P - \vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{g} + \vec{F}_R$$

welche die zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsvektors eines Luftteilchens durch die Summe aus der Wirkung der Druckgradientkraft (1. Term auf der rechten Seite, P : Druckfeld), der Coriolis-Kräfte (2. Term mit $\vec{\Omega}$, dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation), der Schwerkraft \vec{g} und der Reibungskräfte \vec{F}_R beschreibt,

2. der Kontinuitätsgleichung

$$[3] \quad \frac{d\rho}{dt} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

welche die zeitliche Dichteänderung in einem sich mit bewegendem Luftpaket berechnet und die Massenerhaltung garantiert,

3. dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik

$$[4] \quad \frac{dT}{dt} = \frac{1}{c_p \rho} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{c_p} \dot{H}_{ext}$$

welcher die Temperaturänderung eines sich bewegenden Luftpartikels durch eine Druckänderung (1. Term) und die Erwärmungsrate durch externe Energiezufuhr (2. Term, H_{ext}) beschreibt.

Die Lösung dieses auch als *Navier-Stokes*-Gleichungen bekannten Gleichungssatzes ist keinesfalls eine triviale Aufgabe. Er bildet z. B. die Basis für die moderne numerische Wettervorhersage, aber auch die Umströmung eines Tragflügels oder einer Fahrzeugkarosserie kann prinzipiell damit berechnet werden. Leider werden analytische Lösungen nur nach sehr stark vereinfachten Annahmen gefunden, so dass die Anwendung üblicherweise den Einsatz aufwändiger numerischer Mathematik erfordert. Dazu werden die Berechnungen näherungsweise auf einem mehr oder weniger dicht geknüpften Koordinatennetz und Zeitraster durchgeführt.

Die Gitterabstände müssen wiederum dem Problem angepasst

werden. Spätestens an dieser Stelle benötigt man eine konkrete Modellstellung der Prozesse. Die Turbulenzelemente zeigen Dimensionen von wenigen Millimetern bis hin zu mehreren Kilometern und haben dabei eine Lebensdauer von Bruchteilen von Sekunden bis hin zu vielen Minuten. Diesen Skalenbereich in einem Rechenmodell adäquat abzubilden, ist ebenso illusorisch wie die Beschaffung eines experimentellen Datensatzes der Anfangsfelder. Deshalb müssen zusätzliche Überlegungen herangezogen werden, welche das Modell noch weiter vereinfachen.

Messung mit dem Eddy-Korrelationsmodell

Dazu lassen sich anhand der Grundgleichungen [2] bis [4] die Felder der meteorologischen Grundgrößen Temperatur (T), Druck (p) und Wind (u, v, w) rein mathematisch in neue Felder zerlegen, welche nur die Abweichung der Größen in bestimmten Skalenbereichen beinhalten. Durch

diese Filterung werden die für den vertikalen Wärmeübergang verantwortlichen Turbulenzelemente von der Grundströmung (Advektion) isoliert.

Die auf den Physiker Osborne Reynolds zurückgehende Zerlegung einer Zustandsgröße in eine mittlere Größe und deren Abweichung, z. B. der Temperatur oder einer Windkomponente, bildet die Grundlage zu einem einfachen mathematischen Modell der Turbulenz, wie es in Abbildung 1 illustriert wird. Hier werden unterschiedlich dimensionierte Turbulenzelemente mit der mittleren Windgeschwindigkeit der Grundströmung transportiert. Die Elemente rotieren um eine horizontal gelagerte Achse und transportieren dabei warme Luft nach unten und kalte Luft nach oben. Der Gesamttransport ergibt sich durch die Integration über alle Elemente innerhalb eines Zeitraums, der wiederum aus der mittleren Lebensdauer der größten Elemente resultiert.

Nach dieser Vorstellung muss also nicht mehr das individuelle Turbulenzelement berechnet werden, sondern nur deren statische Häufigkeits- bzw. Größenverteilung. Nimmt man nun zusätzlich an, dass sich diese im betrachteten Zeitrahmen nicht verändert, die Drehachsen aller Elemente parallel ausgerichtet sind und sich die statistische Verteilung längs dieser Drehachse ebenfalls nicht ändert, dann kann die räumliche Struktur des Feldes auf eine einfache Zeitreihe abgebildet werden. Zwar können auf diese Weise nicht die Einzelheiten des räumlichen Feldes anhand einer Zeitreihe rekonstruiert werden, jedoch dessen statistische Eigenschaften. Diese Modellvorstellung wird nach G. I. Taylor, der sie 1938 erstmals veröffentlichte, auch als Taylor-Hypothese der eingefrorenen Turbulenz bezeichnet.

Das Taylor-Modell ermöglicht auch einen messtechnischen Zugang zu den turbulenten Flüssen, denn demzufolge genügt die Installation eines einzigen Messkopfes,

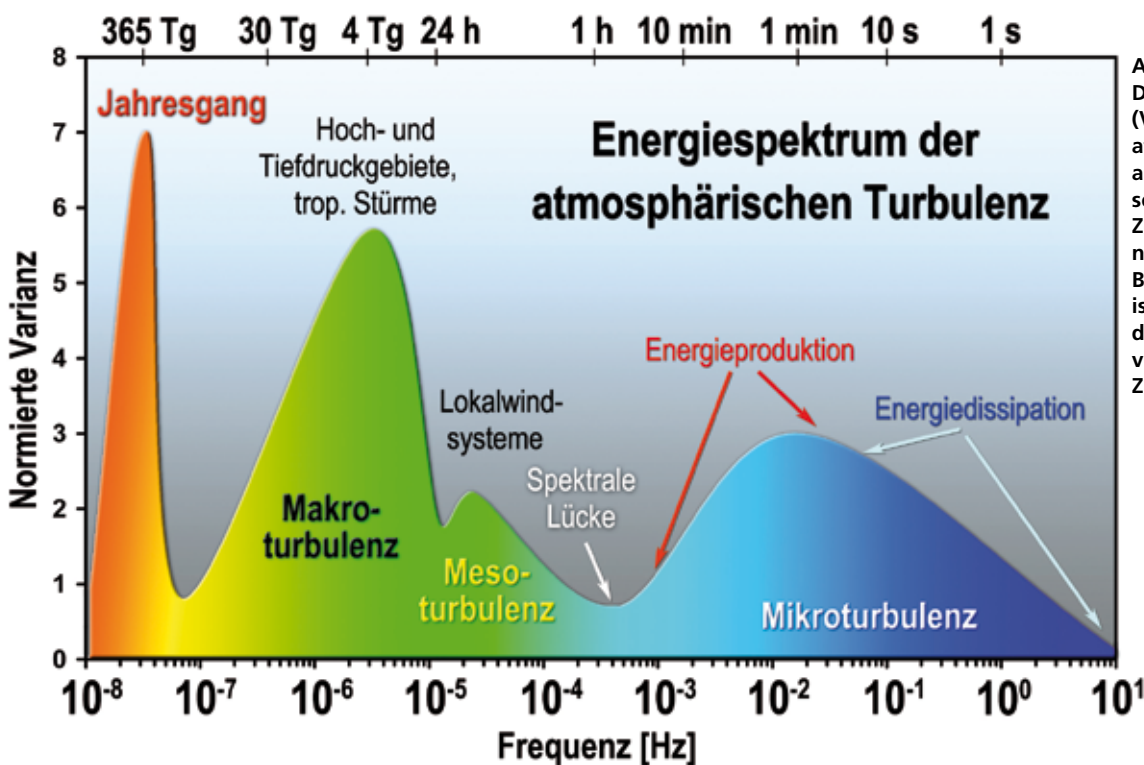


Abb. 2: Eine schematische Darstellung des Energie-(Varianz)spektrums der atmosphärischen Turbulenz anhand der Horizontalwind-schwankung über einen Zeitraum von drei Jahren nach Van der Hoven. Der Bereich der Mikroturbulenz ist blau eingefärbt und durch eine markante Lücke von der großräumigen Zirkulation abgetrennt.

der zur Bestimmung des fühlbaren Wärmestroms Zeitreihen der Temperatur T und der vertikalen Windkomponente w mit möglichst hoher Genauigkeit und zeitlicher Auflösung misst. Nach der zuvor erläuterten Theorie können der kinematische Fluss der sensiblen Wärme, also das zuvor angeführte Zeit-Raum-Integral über alle Fluktuationen, und die aus beiden Zeitreihen berechnete Kovarianz gleichgesetzt werden. Die statistische Kovarianz berechnet sich aus den diskret vorliegenden Messwerten nach

$$[5] \overline{wT'} = \frac{1}{N-1} \left[\sum_{k=1}^{N-1} w_k \cdot T_k - \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} w_k \sum_{k=0}^{N-1} T_k \right) \right]$$

wobei N für die Anzahl der Messwerte innerhalb des oben erwähnten Mittelungsintervalls steht. In der Praxis umfassen der Zeitraum zwischen den Messungen $\Delta t = 0.05s$ und die Integrationsperiode 1 Stunde, folglich steht N für 72.000 Messwerte. Dieses Messverfahren zur unmittelbaren Messung des Wärmeübergangs aus der Atmosphäre auf einen Gletscher wird nach der englischen Bezeichnung

Eddy für Wirbel allgemein als Eddy-Korrelationsverfahren bezeichnet.

Spektralanalyse und Varianzspektren von Messdaten

Die Berechnung des Wärmeflusses nach Gleichung [5] mit Messungen auf dem Gletscher erscheint zunächst einfach, in der Praxis sind diese jedoch ein umfangreiches logistisches Unternehmen, dessen vielfältige Probleme an dieser Stelle leider nicht weiter ausgeführt werden können. Die Kommission für Glaziologie führte solche Messungen im Rahmen eines durch die DFG geförderten Forschungsprojektes im August 1998 und 2000 auf dem Vernagtferner durch und konnte jeweils über knapp 5 Tage eine kontinuierliche Messreihe gewinnen.

Leider ist Gleichung [5] zur Bewertung der Ergebnisse nicht ausreichend, denn der Auswertung der Messungen liegen ja erhebliche Modellannahmen und Vereinfachungen zugrunde, welche die

Realität nicht unbedingt widerspiegeln. Daher müssen die Messdaten daraufhin untersucht werden, inwieweit sie die Modellvorstellung bestätigen oder davon abweichen.

Das zugrunde liegende Turbulenzmodell hat noch weitergehende Anforderungen an die Verteilung der Turbulenzelemente, die bei der Betrachtung des allgemeingültigen Energiespektrums nach Van der Hoven (Abb. 2) verständlich werden. Die enthaltene kinetische Energie wird dort durch die Varianz der horizontalen Windgeschwindigkeit abgebildet. Das Spektrum gliedert sich in vier Bereiche der atmosphärischen Turbulenz, die jeweils Strukturen mit unterschiedlichen Dimensionen und Prozesse beinhalten. Der für die Bestimmung des turbulenten Flusses maßgebliche Abschnitt ist in Abbildung 2 mit dem Begriff „Mikroturbulenz“ gekennzeichnet. Hier spielen die kleinräumigen Vertikalbewegungen der Luft eine dominierende Rolle. Er ist von den überwiegend horizontale Verfrachtungen (Advektion) bewirkenden

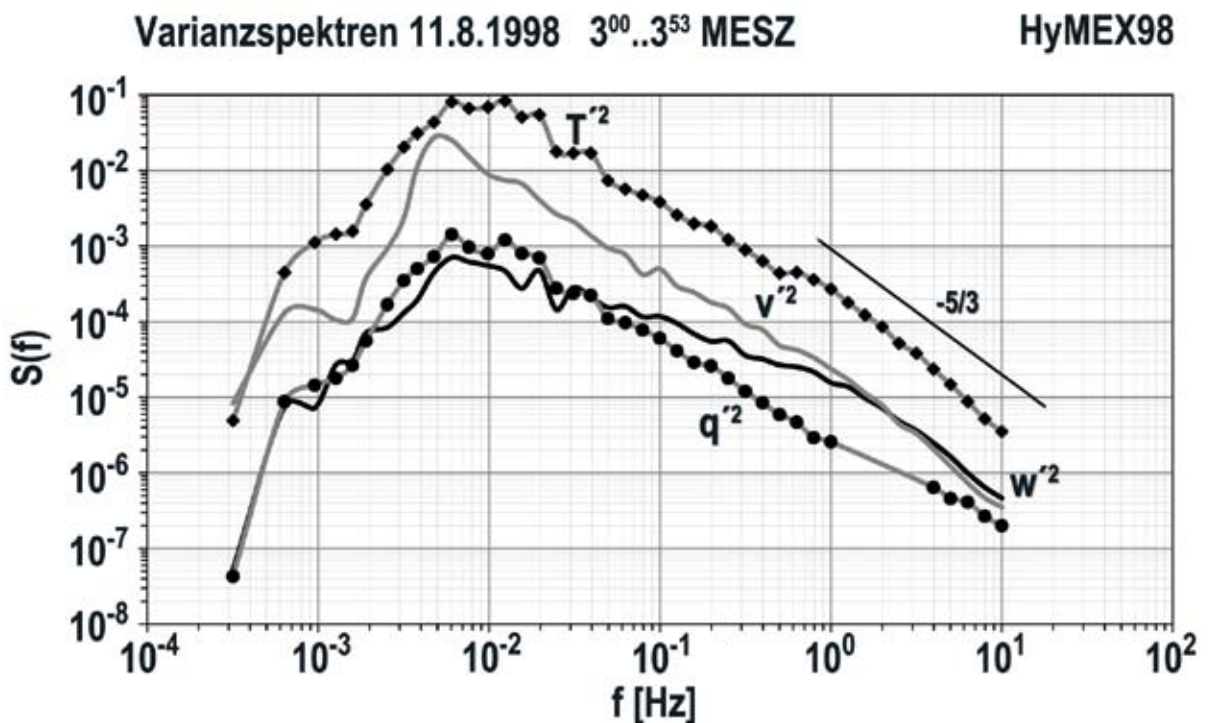


Abb. 3: Experimentell im Rahmen des Experimentes HyMEX98 auf dem Vernagtferner bestimmte Varianzspektren der Temperatur (T), der horizontalen (v) und vertikalen (w) Windgeschwindigkeit sowie der Feuchte (q).

Normierte Varianzspektren w'^2 Vernagtferner

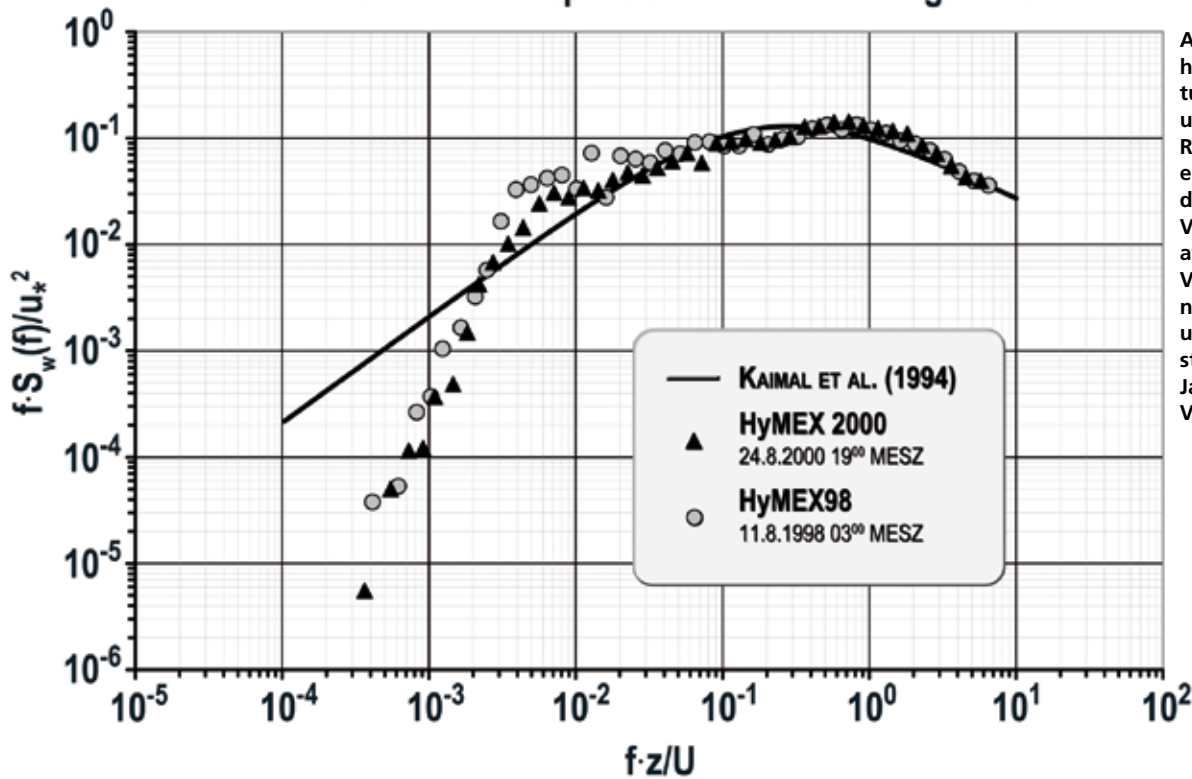


Abb. 4: Mit der mittleren horizontalen Verfrachtungsgeschwindigkeit U und einer aerodynamischen Rauigkeitsskala u_* auf einem vergleichbaren Standard normierte gemessene Varianzspektren der Fluktuation des Vertikalwindes im Vergleich zu Modellspektren nach der Forschergruppe um Kaimal. Die Messungen stammen jeweils aus den Jahren 1998 und 2000 am Vernagtferner.

großräumigen Luftbewegungen deutlich durch eine Lücke im Spektrum abgegrenzt. Das Spektrum der Mikroturbulenz wird zusätzlich durch ein Maximum in zwei Bereiche unterteilt, die eine Aussage über die Ursache der turbulenten Bewegungen erlauben.

Die kleinsten Elemente folgen einer strengen Kaskade, in welcher die Energie von den größeren Wirbeln zu den kleineren weitergereicht wird. Dabei wird Energie verbraucht (Energiedissipation), welche der Grundströmung entnommen wird. Letztere benötigt somit einen Motor, im Falle des Gletschers ist dies in der Regel der katabatische Wind, in dem sich kalte schwere Luftmassen entlang der Falllinie infolge der Schwerkraft bewegen. Der Abfall der Varianz hin zu den hohen Frequenzen folgt dabei einem strengen linearen Gesetz, welches überprüfbar ist. Abweichungen deuten auf Fehler in den Daten hin.

Im Bereich des Spektrums links des Maximums wird dagegen Turbulenz auf Grund von Auftriebskräften erzeugt. Zur Bewertung der Ergebnisse muss geprüft werden, ob die gemessenen Zeitreihen die theoretisch geforderten Bedingungen erfüllen. Auch für diese Analyse verfügt die Mathematik über nützliche Werkzeuge. Die Transformation der räumlichen Information auf eine Zeitreihe entspricht einer Fourieranalyse. Das resultierende Varianz- oder „Powerspektrum“ kann auch aus diskreten Zeitreihen berechnet werden. Allgemein berechnen sich die Koeffizienten $S(f)$ zu

$$[6] S(f) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f(k)}{N} \exp(-i2\pi mk/n)$$

Die Summation über alle Fourierkoeffizienten S liefert die totale Varianz σ der Zeitreihe.

$$[7] \sigma^2 = \sum_{n=1}^{N-1} S(n)$$

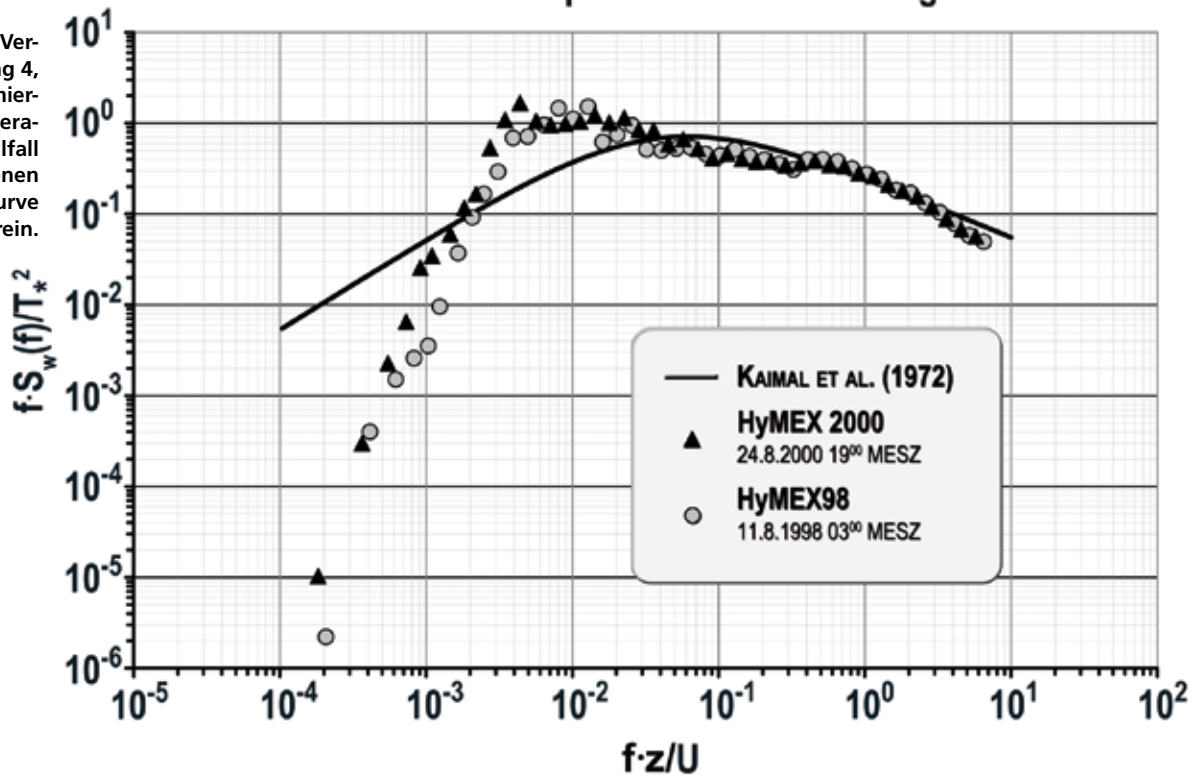
Diese Spektren erlauben sowohl die Überprüfung der Messdaten auf systematische Fehler als auch die Gültigkeit der wesentlichen theoretischen Modellannahmen.

Abbildung 3 beispielsweise zeigt, dass die wesentlichen Charakteristika der Energiespektren für die untersuchten Messgrößen Temperatur (T), horizontale Windgeschwindigkeit (v), Vertikalwind (w) und spezifische Feuchte (q) erfüllt sind. Da die Abnahme der Varianzen im Rahmen der Messgenauigkeit dem theoretisch geforderten linearen Verhältnis von $-5/3$ entspricht, ist dem Messsignal kein übermäßiges Störrauschen überlagert.

Entsprechend der Theorie lassen sich Normspektren ableiten, mit denen man die gemessenen Spektren unmittelbar vergleichen kann. Die Abbildungen 4 und 5 zeigen, dass sowohl die gemessenen Varianzspektren für die Temperatur als auch

Normierte Varianzspektren T'^2 Vernagtferner

Abb. 5: Der analoge Vergleich wie in Abbildung 4, jedoch hier für die normierten Spektren der Temperaturfluktuation. Im Idealfall stimmen die gemessenen Werte und die Modellkurve überein.



diejenigen für die Vertikalwindfluktuation in den Bereichen, die durch die Erzeugung mechanischer Turbulenz gekennzeichnet sind, sehr gut mit den Modellen übereinstimmen. Im langwelligen Bereich zeigen sich dagegen Abweichungen, die durch die besonderen Verhältnisse in der Gletscherwindschicht verursacht sind. So werden sowohl die starke Dämpfung der Vertikalbewegung durch die andauernde stabile Schichtung über der 0° C-kalten Oberfläche (Abb. 4/5) durch einen stärkeren Abfall des Spektrums hin zu größeren Skalen als auch der Prozess des Einmischens wärmerer Luft durch eine stärkere Intensität im Bereich des Maximums (Abb. 5) sichtbar.

Das Co-Spektrum als Premium-Analysewerkzeug

Im Rahmen der Erläuterungen zum Eddy-Korrelationsverfahren wurde bereits auf die Bedeutung der Kovarianz bei der Berechnung des

turbulenten Flusses hingewiesen. Aus den Varianzspektren kann aus Real- und Imaginärteil das Kospektrum berechnet werden

$$[8] \text{Co}_{wT} = \text{Re}(S_w) \cdot \text{Re}(S_T) + \text{Im}(S_w) \cdot \text{Im}(S_T)$$

Das Kospektrum ist ein weiteres interessantes Analysewerkzeug. Es zeigt die Anteile der Flüsse pro Frequenz. Ist die mittlere Geschwindigkeit des Grundstroms bekannt, können diese Frequenzen unmittelbar in die statistischen Dimensionen der Turbulenzelemente umgerechnet werden. Dies lässt wie der Blick von einem Aussichtsturm auch Rückschlüsse über das Quellgebiet und die dortige Intensität für den Wärmeübergang zu.

Ein Beispiel für einen vollständigen Tagesgang der Intensität des Wärmeübergangs in Relation zur Größe der damit verbundenen Wirbel zeigen Abb. 6a und 6b. Generell stammen Beiträge aus einem Umkreis von über 1000 m, also von der gesam-

ten Gletscherfläche. Die größten Intensitäten sind mit Wirbelgrößen von 100 m und kleiner verbunden. In den Nachtstunden, insbesondere jedoch zu den Zeiten von Sonnenauf- und -untergang wird der Beitrag des fühlbaren Wärmestromes zur Schmelze maximal, da in dieser Zeit auch die katabatischen Winde am stärksten sind, welche die Energiequelle für die turbulente Bewegung darstellen. Im Laufe des Nachmittags können dagegen sogar Bereiche gefunden werden, in denen ein Wärmeaustausch vom Boden in die Atmosphäre stattfindet. Dieser ist ursächlich mit der starken Erwärmung der aperen Felsen in der Gipfelregion durch die Sonneneinstrahlung verbunden. Somit enthalten die Messreihen Signale, die nichts mit der schmelzenden Oberfläche zu tun haben. Sie müssen durch mathematische Filteroperationen aus dem Kospektrum entfernt werden, bevor die Kovarianz durch Integration über das Spektrum berechnet wird.

Ableitung einer Parametrisierung

Das eigentliche Ziel der Untersuchung bestand aber nicht allein darin, eine mathematische Methode zu formulieren, mit welcher der Wärmeaustausch trotz der Komplexität der Zusammenhänge möglichst genau berechnet werden kann, sondern es sollten auch allgemeingültige einfache Formeln zur Berechnung abgeleitet werden. Dabei wird vor allen Dingen Wert auf möglichst geringe Ansprüche an die erforderlichen Eingangsdaten gelegt. Es sollten möglichst Mittelwerte für Temperatur und Wind genügen.

Für den Fall des Wärmeübergangs auf die Gletscheroberfläche kommen dafür wiederum allgemeine Erkenntnisse der Mathematik zur Hilfe. Das bereits zitierte Kospekttrum lässt sich über den gesamten Frequenzbereich in einen Korrelationskoeffizienten R_{wt} und die Varianzen der Komponenten zerlegen

$$[9] \quad \overline{wT'} = \sum_{k=0}^{N-1} Co_{wT}(f_k) = R_{wt} \cdot \sigma_w \cdot \sigma_T$$

Der Korrelationskoeffizient R_{wt} zeigt nur geringe Abhängigkeit von der Frequenz f_k . Die Untersuchung der mit den Methoden der Spektralanalyse auf Qualität geprüften Messdaten zeigt, dass hinreichend

lineare Proportionalitäten der Temperaturvarianz zur mittleren Differenz der Lufttemperatur in 2 m Höhe und der Oberflächentemperatur (in der Regel 0° C) sowie der Vertikalwindvarianz zur mittleren Windgeschwindigkeit

$$[10] \quad \sigma_T \approx T_L - T_0, \quad \sigma_w \approx \sigma_u \approx \bar{U}$$

$$\text{und } R_{wt} \approx \frac{T_L - T_0}{U}$$

bestehen. Zusammen mit Gleichung [9] lässt sich eine relative einfache Formel für den kinematischen Wärmefluss ableiten, die strukturell der Wärmeleitungsgleichung [1] ähnelt, jedoch die eingangs erwähnten Besonderheiten des turbulenten Wärmeaustauschs weitgehend berücksichtigt:

$$[11] \quad H = R_{wt} \cdot 0.01182 \cdot U \cdot (T_L - T_0)$$

$$\text{mit } R_{wt} = 0.119 \cdot \frac{T_L - T_0}{U} - 0.438$$

Im Gegensatz zu den sehr komplexen Gleichungssystemen [2] – [4]

lässt sich eine Parametrisierung wie in Gleichung [11] auch in hydrologischen Modellen für große Einzugsgebiete gut einsetzen, denn sie zeigt einen ausgewogenen Kompromiss zwischen dem benötigten Rechenaufwand und der Genauigkeit bei der Wiedergabe der Prozesse. Inzwischen hat sich der Ansatz sowohl im Schneemodell des Entscheidungsunterstützungssystems DANUBIA für das Einzugsgebiet der Donau von 77.000 km² bewährt als auch im dort integrierten Gletschermodell SURGES, welches die Entwicklung von 556 Gletschern aller Größenordnungen im Einzugsgebiet über bis zu 100 Jahre berechnet.

Die Mathematik ist daher auch in der Glaziologie das wichtigste Werkzeug, um die physikalischen Zusammenhänge zunächst im Detail zu formulieren und anschließend praktikable Vereinfachungen abzuleiten.

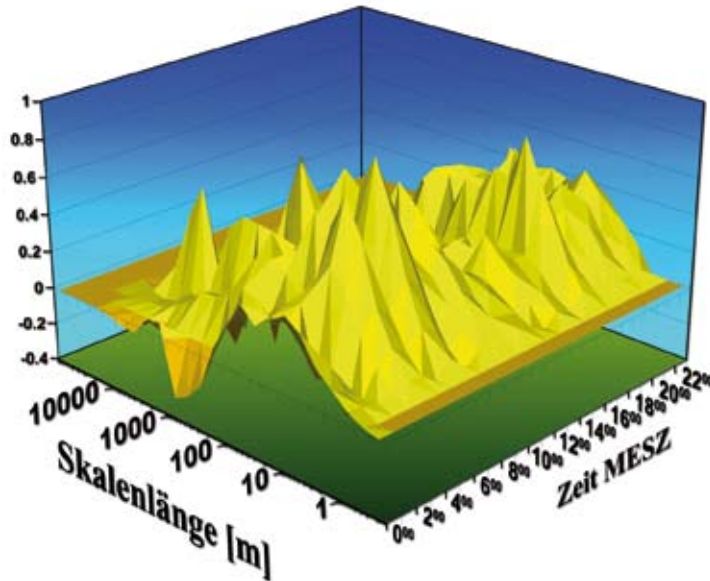


Abb. 6a: Dreidimensionale Darstellung des Beitrages der Turbulenzelemente zum Wärmefluss in Abhängigkeit von ihrer Größe im Verlauf eines Tages auf dem Vernagtferner.

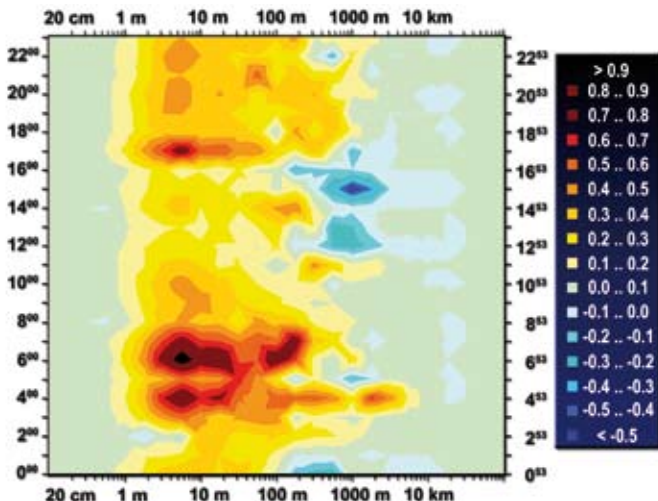


Abb. 6b: Grundrissdarstellung der Abbildung 6a, abgeleitet aus den durch die mittlere Windgeschwindigkeit normierten Kospektren, gemessen auf dem Vernagtferner im hinteren Ötztal.

Der Autor ist wissenschaftlicher Mitarbeiter der Kommission für Glaziologie der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Er arbeitet im Projekt GLOWA-Danube, ein durch das BMBF gefördertes Vorhaben zur Untersuchung des Globalen Wandels des Wasserkreislaufs, das mit der Verknüpfung von naturwissenschaftlichen und sozioökonomischen Fragestellungen im Untersuchungsgebiet Obere Donau bis zum Pegel Passau wissenschaftliches Neuland betritt.